Source gallica.bnf.fr / Bibliothèque nationale de France

Source gallica.bnf.fr / Bibliothèque nationale de France

Source gallica.bnf.fr / Bibliothèque nationale de France

Source gallica.bnf.fr / Bibliothèque nationale de France

Source gallica.bnf.fr / Bibliothèque nationale de France

215-1974

V 61

Rés. g. V. 450

1466

Source gallica.bnf.fr / Bibliothèque nationale de France

CHRISTIANI HVGENII ZVLICHEMII, CONST. F. HOROLOGIVM OSCILLATORIVM SIVE DE MOTV PENDVLORVM AD HOROLOGIA APTATO DEMONSTRATIONES GEOMETRICÆ.

PARISIIS,
Apud F. MUGUET, Regis & Illustrissimi Archiepiscopi Typographum, viâ Citharæ, ad insigne trium Regum.

MDCLXXIII.
CVM PRIVILEGIO REGIS.

Source gallica.bnf.fr / Bibliothèque nationale de France

Dividitur liber hic in partes quinque, quarum

Prima *Descriptionem* HOROLOGII OSCILLATORII continet.

Secunda agit de *Descensu gravium*, & *motu eorum in Cycloide.*

Tertia de *Evolutione & Dimensione linearum curvarum.*

Quarta de *Centro Oscillationis seu Agitationis.*

Quinta *alterius Horologii constructionem*, in quo circularis est penduli motus, exhibet, & Theoremata de *Vi Centrifuga.*

Source gallica.bnf.fr / Bibliothèque nationale de France

LVDOVICO XIV, FRANCIÆ ET NAVARRÆ REGI INCLYTO.

RENATAM, Rex maxime, restitutamque hoc sæculo Geometriam, Galliæ præcipue debemus. Hinc enim orti, qui magna meliorique sui parte deperditam, ac veluti sepultam, instaurarunt primi, & in lucem reduxerunt. Quorum vestigiis insistentes, ita eam deinde, per totam Europam, excoluere viri subtilissimi, ut pauca jam posterorum industriæ ab his relicta videantur; veterum vero inventa longissime prætervecti sint. Inhac scientia, quam semper admiratus sum & amavi plurimum, quandocunque ad eam animum applicui, illa mihi præ cæteris proposui investiganda, quæ vel ad vitæ commoda, vel ad Naturæ cognitionem, reperta prodesse possent. Tunc verò optimè operam me collocasse existimavi, cum in ea incidissem, in quibus utilitas cum inveniendi difficultate, ac subtilitate ali-

qua, conjuncta foret. Quod si commendationis nonnihil accersere muneri nostro permittitur, ne prorsus indignum tua magnitudine appareat; non alias felicius, quam in hoc Horologii invento, utrumque illud me consecutum esse profiteor. Etenim, cum ex parte mechanicum sit inventum; ex parte altera, eaque multò præcipua, geometricis principiis constet; id quod ad posteriorem hanc attinet, non levi conamine, ex intimis artis recessibus petendum fuit: adeo quidem, ut inter omnia, quæ impensiore studio hactenus pertractaverim, haud dubie primum huic speculationi locum tribuam. Quænam vero in his sit utilitas, non est quod multis, Rex potentissime, ostendere tibi laborem. Non solum enim diutinâ experientiâ compertum habes, ex quo regiæ tuæ penetralibus recipi meruere Automata nostra, quantum, æquabili horarum demonstratione, cæteris hujusmodi machinationibus excellant: sed & potiores usus eorum, quibusque jam inde à principio mihi destinata fuere, non ignoras. Illos scilicet, quos & in Cælestium observationibus, & in Longitudinibus locorum inter navigandum dimetiendis, præstare apta sunt. Tuo enim jussu, non semel, per mare vecta fuere Horologia nostra. Tuis auspiciis eadem nec pauca, Astronomiæ usibus dicata, visuntur in præclara illa Vraniæ arce, quam insigni nuper magnificentia, quantaque antehac regum nemo, exædificandam curasti. Quæ quoties mecum reputo, toties de fortuna hu-

Source gallica.bnf.fr / Bibliothèque nationale de France

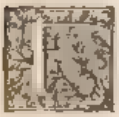
jus inventi, quod in tua tempora incideret, non parum mihi gratulari soleo. Nec jam requiret quisquam, opinor, qui quantum tibi illud debeat intelliget, cur lucubrationes has, quibus rationem ejus omnem descriptionemque explicui, augusto Nomini tuo inscribendas duxerim. Ac minus etiam id mirabitur, qui mihi, ad hæc atque alia meditanda, tranquillum otium benignitate tua contigisse didicerit. Namque & hujus, ut mihi aliquatenus apud te ratio constaret, adnitendum erat; & quoquo modo conandum, ut, multis continuisque à te beneficiis affectus, nonnulla grati animi significatione defungerer. Scio equidem, rebus maximis, negotiisque iis intento, quæ in illo rerum fastigio positum agitare convenit, haudquaquam tibi liberum esse, ut ad hujusmodi contemplationes animum, alioqui rerum omnium capacem, advertas. Sed non ideo minus grata hæc fore, minusve tibi probatum iri arbitror, Rex augustissime; cui illa maximè placere videmus, quæ plurimum publicè prosunt; neque aliud magis curæ esse, quam ut nova incrementa sumant optimæ disciplinæ, novisque illu trentur inventis. Hoc enim satis declarat eximia illa tua, ac singularis, tum in ipsis promovendis, tum in his qui cognitione earum præminent remunerandis, liberalitas. Quam non immensæ, ac solito majores, bellorum impensæ quidquam imminuunt: non Galliæ tuæ fines circunscribunt. Vt plane te hoc agere appareat, quò non solum sub

imperio tuo viventes, ſed & Orbis univerſus, quacunque beneficio tuo dignus eſt, te regnante, eruditior, ornatior, felicior evadat. Cui veriſſimæ præclariſſimæque gloriæ tuæ, ita aliquid fortaſſe etiam hæc literaria monumenta conducent; ut, ſi viguiſſe hoc tempore ſtudia iſta, arteſque, poſteris teſtari poſſint, ſimul illos edoceant, tuæ hoc virtuti, atque animi magnitudini, ante omnia acceptum ferendum eſſe. Lutetiæ Pariſiorum; XXV. Mart. A. CIↃIↃCLXXIII.

HADRIANI VALLII DAPHNIS,

ECLOGA.

Ad Christianum Hugenium Zulichemium, Constantini F.



INITIUM tutela, simul jucunda voluptas,
Dilectæ Phœbo, Scevernides * Oceaninæ;
Hunc quoque Pierium mihi fortunate laborem:
Pervigilem noctem quo carmine duxerit Ancon
Navita, dicemus: vestro sic gurgite numquam
Pan laver, aut rupes incestent æquora Fauni
Te, quem Fama vehit super aurea sidera curru,
Ne pigeat nobis aurem præbere faventem,
HUGENIDE, decus Hugenidum, fratrumque patrisque:
Haud indigna tuo ferimus donaria sensu,
Siceliſin aptata modis à vate Batavo
Mixta Palæphatio commenta Solensia versu,
Teque intertextum tuaque præclara reperta.
Iam caput Oceano, stipata minoribus astris,
Extulerat radius fraternis æmula Phœbe,
Cum reditum molirentur pastoria pubes,
Sidere quam pleno conchas legisse marinas
Iuverat, hærentesque vadis captare paguros
In celso tamen advertunt Ancona morantem
Colle, reum toties promissi carminis, ipsum
Thestylis & Corydon, quos cætera turba secuti,
A tergo circumveniunt, cinguntque corona.
Ecquid agat, rogitant blandè tum fausta precantur,
Et damnant voti, promissaque carmina poscunt.
Contra ille, O Pueri, quid portet crastinus Eos,
Sedi explorator, turmales agmine merg.,
Solivaga aut cornix, aut alcyones desertæ

* Scevernia, Pagus apud Batavos mari adjacens

DAPHNIS ECLOGA.

Si qua darent mihi signa, maris cras æquor arandum.
Detinuit nunc usque Iovis clementia ludi,
Et picturatus tot circum animalibus æther.
Quæ nos in vitreo miramur monstra profundo,
Fert radians æther, vultus formasque natantum.
Cancer ibi est, delphinque, est grandi corpore cetus.
Ad Boream pisces, & contemplere sub Austro
Pisces; nuper ubi numero crevisse feruntur.
Sunt urna, fluviusque, & aplustris comita carina
Illic, quin operis simulamina plurima vestri,
Luminaque in cœlo pecori debentia nomen.
Sunt hœdi parvæque sues, materque capella,
Et fuse sparso quæ candet semita lacte.
Vestibulum servant, elucens vellere fulvo
Dux aries, ingensque auratus cornua taurus.
Binii cernuntur que canes, pernoxque bubulcus,
Plaustraque, quique auriga suis excussus habenis.
Stellatum volat alatus per inane caballus:
Ac præsepe suum juxta stabulantur asselli.
Illic virgo, manum Cereali inlustris arista,
Et, transmutatus faciem, Pan ipse reandet,
Daphnin amans vestrum, secreta rupis in umbra,
Vranie velut edocuit: me singula Daphnis.
Singula quæ (carmen quia poscitis) ordine pandam.
Extemplo tentat vocem: numerosque modosque
Perpendens mulcet variis concentibus auras.
Tum venti posiere, jacet sine fluctibus æquor;
Factaque sunt terris, sunt facta silentia ponto.
Mox intertatur: Quod prosperet, ab Iove magno
Ordiar: ordiri consuerunt ab Iove vates.
Vos, nec enim rerum brevis hic mihi nascitur ordo,
Nocturnum chorea defendite corpore frigus.
Inde Iovis magni cunas, veterisque celebrat
Saturni jussum crudele, dolumque Cybelles,
Ortaque Dictæis Corybantia sacra latebris:
Vt puero nutrix sit olentis lecta mariti
Vxor, & ipsa recens hœdos enixa gemellos,
Quæ is conucata polum modo lucida stella frequentet,
Quæ prius Oleniis balavit bestia campis;
Sub pedibusque terat formosi limen Olympi

Tantus

Tantus amor Iovis, & percepti gratia lactis.
Nec tamen hoc niveum manasse fluore nitorem,
In duo secta vias, oculis manifesta videntum,
Semita quo candet ducens ad tecta Tonantis,
Tergeminam sed noctem productumque canebat
Alciden mundo; deus immortalis haberi
Haud pote qui fuerat, sopitæ parvula mammis
Labra pater gnati nisi conjugis admovisset:
Quæ, simul experrecta, simul conterrita, surgens
Vvidulas tenero mammas subtraxerit ori,
Indignata, pavimentum tabulataque cœli
Deciduus maculis ut tunc infecerit albis
Per convexa ruens in se revolubilis humor:
Orbita cycneo nunc unde bifurca colore,
Ducta per æquales medio discrimine partes,
Cæruleum velut argento ferruminet axem:
Axem, cervices qui quum lassaret Atlantis,
Haud gravis Herculeo requierit tarcina collo,
Atque tot ærumnas quem post, manesque subactos,
Ipse suis ornet jam porrro magna triumphis;
Hesperidum contra custodem divitis horti
Insurgens Anguem pede nixus, apertaque retro
Terribili rictu nil curans ora Leonis;
Lerneæque audacem Hydræ succurrere Cancrum,
Monstra novercales testantia jugiter iras
Et frustra bacchatum odium Junonis iniquæ.
Hinc aliam memorat grassatam fraude novercam,
Et transmittendi pavidam nimis æquoris Helen
In thalamos sit ut illa tuos, Neptune, recepta:
Phryxeumque pecus, fœtamque heroibus Argo
Phasidos ad fluctus deducit & æthera cantu.
Nec silet Europæ vectoris præmia; vel te,
Bigarum Pelopis perjuri, Myrtile, rector.
Myrtoum pelagus signaras ante caduco
Funere, sublimem nunc tollunt cornua Tauri.
Haud procul his Hyades notat exardescere sed, quæ
Sunt Hyades Graiis, Suculas dixisse Latinos,
Atque duas septem mutasse Trionibus Arctos;
Arctophylaca pigro, sua plaustra sequente, Bubulco,
Quando bovem prisco vocitabant more trionem,

Quod tereret duro proscissam vomere terram.
Hanc adeo sortem miserans, suspiria ducit,
Bucerumque genas questa compellat inani;
Ah pecus inclite, armentum! sæcla fuerunt,
Pondere quum duro neque vos gemeretis aratri,
Navita nec vestro vocitaret nomine stellas.
Tunc neque sidus erat terris pia Virgo relictis,
Quæ Cereale manu spicum gerit, Icariotis
Sive sit Erigone, cui fida Canicula patrem
Quærenti indigna monstravit cæde peremtum,
Atque, comes dominæ, domino comitem Orioni
Astra minor locium majorem repperit inter:
Seu magis Astræi sit sanguine creta, perenne
De genitore suo quæ nomen contulit astris:
Sive sit antiquæ Themidis justissima proles,
Aversata jugo vos aspectare gravari,
Tempora dum, pulsis melioribus, arva surgunt.
Sive sit alma Ceres, horrens fugitiva videre
Vos quoque mactari, nil pejor linquit inanium
Ferrea dum soboles, ipsorum inimica Deorum.
Quos, quasi de terra (nam Dii columbis & illam)
Sit pepulisse parum, tentavit pellere cœlo.
Tum detestatur suffultos angue Gigantas,
Porphyriona, statu terrentem cuncta minaci,
Rhœcumque, immanemque Gygen, validumque Mimanta,
Enceladumque, manuque rotantem Ægeona centum;
Et, cui par nemo feritate, Typhoea dirum,
Ausos invasisse Deos tellure fugatos,
Ac totum magno cœlum complesse tumultu,
Undique divulsas jaculantes torviter ornos
De tumulis cumulorum montibus ex aggestis.
Terrigenam ut pubem Divûm penetralia sancta
Rimantem, Superi mentito fallere vultu
Quæsierunt, audit, dispertitosque pavore:
Donec apud late stagnantis flumina Nili
Horrificam faciem Pan sumserit Ægocerotis;
Ambiguoque sono Superos animarit ad arma,
Anguipedesque metu dare terga coegerit omnes:
Cœlo donandos Asinos auxisse timorem
Congerie vocum, perterrirepoque fragore.

Illa cæliculis nam tempestate fuisse
Auxilio Satyros, Silenorumque phalangem,
Evantes in asellis cum Bacchæo ululatu,
Thyrsis armatos, tectos colocynthide parma.
Parvus ut interea volucer cum matre Cupido
Venerit Assyrii fugiens Euphratis ad undam;
Induerintque gregis (Syriæ post numina genti)
Squammigerum formas, gemini nunc aurea Pisces
Lumina, signiferum Capricorno juncta per orbem,
Ni fusa medius secernat Aquarius Vrna;
Deucalioneos neque non edisserit imbres,
Nectaris aut quanti Ganymedes pocula verset;
Sive sit is Cecrops, peplo præsignis Athenæ,
Pastor Aristæus seu plena alvearia gestet,
Quæ subter volitetis apes examine denso.
Qualiter & pandus vectarit Arionа Delphin,
Ac aliter vectum Danaeium Persea narrat;
Cepheaque, Andromedenque, & mœstam Cassiepeiam;
Inferumque polo vastum Pistricis hiatum:
Quem Phaethonteus longo sinuamine propter
Fulgeat Eridanus declivi proximus Austro:
Nuper ad occulti Batavos ubi vertitis axem
Intuitos nova squammigerum simulacra micare:
Sollertes Batavos, imo seu gurgite piscem
Venari sit opus, vel in alto sidera cœlo
Tum canit, ut Daphnis sacra sub rupe docentem
Viderit Vranien: argutas carmina silvas,
Et repetita cavos edisceere carmina montes:
Vt Chaldæa vetus, mira dulcedine capti,
Stent auditores circum, & Babylonia turba;
Dein quos Graia tulit, quos aut Nilotica tellus,
Itala quos, ac pulchra suo cum Cæsare Roma,
Post Arabum de stirpe viri & regnator Iberus,
Ac tandem quos consultos Germania misit
Astrorum cœlique, suæ qui sidera terræ,
Inferior nullis ut item neque Gallia desit;
Gallia magnanimi Regis splendore superba,
Borbonios ignes cui parturit arduus æther:
Tum Dea quo Daphnin, Divam quo Daphnis amore
Complexus, quanti non conscia Latmia saxa.

DAPHNIS ECLOGA.

Vtque Conon juveni radium donarit, utrimque
Multo insignem auro, & pellucidulis crystallis,
Per quas quod spectes, prope fiat, & augmina sumat:
Dixerit & Sollers, en, primus quale Batavus
Munus adornarit; sed Etruici quo decus Arni
Est Antenorea senior Tyrrhenus in urbe
Regna Jovis princeps metatus, ab æthere vobis
Nunquam nota prius miracula nuntia portans,
Lunari montes, vultus tibi, Phosphore, ternos,
Quove satellitio sublustri nocte vagetur
Stella Deûm regis per cærula templa superne:
Hoc quoque tu non nota prius miracula prodes:
Hujus erat tibi servatus sollertior usus;
Arcanumque Chroni mortalibus omne recludes.
Accipe frustra olim nobis optabile donum
Daphnidis ad gratam nomen pernice chorea
Exsultant alacres Pueri: neque segnius ipse
Prosequitur; Geminas imitantia lumina falces
Hactenus ut vanè Saturni credita sidus
Oblongo tam diversa suo imagine dicto
Fingere, quando globum teretem teres annulus extra
Splendet, & ambo nigror spatii distinguitur intus;
Exiguo circum quos erret stellula gyro:
Omnia divino quæ fretus munere Daphnis
Extulerit, non ante novam vulgata per artem:
Adjungitque, quod his meritis permullus, eundem
In sua magna Chronus sit odire sacraria passus
Hoc oculis lustrarit ut omnia, promiserit atque
Inventum subtile secandi temporis illinc;
Partes quo minimas ac momina dividat horæ,
Oscilla ex tenui suspendens mollia filo:
Id labyrintheos curlus qui dirigat alni,
Ignarumque viæ ratis haud sinat esse magistrum:
Cui neque quotidie tam certus spondeat auctor,
Oceano quantum Titan altissimus exstet;
Ac quibus emergat, quaeis tunc simul occidat oris,
Daphnidos egregio norint conamine docti.
Ille canit: chorus in numerum sua brachia quassant,
Alternoque solum pede pulsant: at freta saltu
Librabant hilares sese super humida thynni.

DAPHNIS ECLOGA.

Auritus leporum populus tunc creditur ultro
Iliceas liquisse domos, carasque quietes
Vicini nemoris nulloque frequentior unquam
Caricis arrosor produsse cuniculus antris
Tempore narratur; narrent si vera puellæ
Litoreæ, quæ siccandis custodia passim
Retibus ad ventos expansis forte sedebant.
Pectore Nereïdes nudo, lasciva caterva,
Visa per incertam Lunam, visæve putantur,
Et Triton, Glaucusque, procul sub luce maligna
Tuque, cubans juxta stratas prope littora phocas,
Neptuniarum pecudum fidissime custos.
Neu quisquam seræ meminit decedere noctis.
Interea tenebræ densantur, & abdita nimbo
Cynthia dum latitat, cœli de parte serena
Cinctum non solitis processit crinibus astrum,
Prolixumque trahens albore notabile lyrma.
Mirantur chorus attonitus, miratur & ipse;
Præsertim tantum capiti cum demsit honorem,
Ornatumque sequacem omnem mox reddita Luna.
Infit &: Ad sua quisque mapalia tendite nota,
Prodigio nil solliciti, curamve foventes.
Insuetos alias tales cantabimus ignes,
Et trepidantem nequicquam formidine vulgum.
Hæc Aucon mihi visa tibi quæ digna referri,
HUGENIDE, decus Hugenidum, cui sidera curæ.
Nec Phœbum ac Pumplæ fas est contemnere Divas,
Queis tua tota domus, fratres, genitorque sicati.
Sic neque te facies peregrini terreat astri,
Idemve anne alius vario fulgore cometes.

A. CIↃ IↃC LXV.

PRIVILEGE DU ROY.

LOUIS par la grace de Dieu Roy de France & de Navarre : A nos amez & feaux Conseillers, les Gens tenans nos Cours de Parlement, Maistres des Requestes ordinaires de nostre Hostel, Baillifs, Seneschaux, Prevosts, leurs Lieutenans, & tous autres Justiciers & Officiers qui l'appartiendra, Salut. Nostre cher & bien ame FRANCOIS MUGUET nostre Imprimeur ordinaire, Nous a très humblement fait remontrer qu'il auroit esté mis entre les mains un Livre intitulé *Christiani Hugenii Zuylichemii, Comitis F. Horologium Oscillatorium, sive de motu Pendulorum ad horologia aptato demonstrationes Geometricæ*, qu'il desireroit donner au public si nous plaisoit en accorder la permission, humblement requerant icelle. A CES CAUSES voulant favorablement traiter l'Exposant, Nous luy avons permis & accordé, permettons & accordons par ces presentes d'imprimer ou faire imprimer ledit Livre en telle forme, caractere, volume, & autant de fois que bon luy semblera, durant le temps de six années entieres & consecutives, à commencer du jour qu'il sera achevé d'imprimer pour la premiere fois, faisant très expresses defenses à toutes personnes de quelque qualité & condition qu'elles soient, de l'imprimer ou faire imprimer, vendre ny debiter durant ledit temps en aucun lieu de nostre Royaume, sans le consentement de l'Exposant, ou de ceux qui auront droit de luy, sous quelque pretexte que ce soit, à peine de quinze cens livres d'amende applicable, un tiers à Nous, un tiers à l'Hopital General de nostre ville de Paris, & l'autre tiers à l'Exposant, confiscation des exemplaires contrefaits, & de tous dépens, dommages & interests, à la charge qu'il en sera mis deux exemplaires en nostre Bibliotheque ordinaire, un en celle du cabinet de nostre Louvre, & un autre en celle de nostre ame & feal Garde des Sceaux le sieur Dalegre. Si vous mandons que du contenu en ces presentes vous fassiez jouir & user l'Exposant, & ceux qui auront droit de luy, pleinement & paisiblement, cessant & faisant cesser tous troubles & empechemens au contraire, voulans qu'en inserant ces presentes ou extrait d'icelles en chacun des exemplaires, elles soient tenues pour bien & deuëment signifiées. Commandons au premier nostre Huissier ou Sergent sur ce requis, faire pour l'execution des presentes tous exploits à ce necessaires. CAR tel est nostre plaisir. DONNÉ à Versailles le dernier jour de Septembre l'an de grace mil six cens soixante-douze, et de nostre Regne le trentiéme. Signé, LOUIS. Par le Roy, COLBERT.

Registré sur le Livre de la Communauté des Marchands Libraires & Imprimeurs de Paris, le 4 Novembre 1672 suivant l'Arrest du Parlement du 8 Avril 1653 & celui du Conseil Privé du Roy du 27 Février mil six cens soixante-sept. Signé, D. THIERRY, Syndic.

Achevé d'imprimer pour la premiere fois le premier jour d'Avril 1673.

Les Exemplaires ont esté fournis.

CHRISTIANI

CHRISTIANI HVGENII
ZVLICHEMII, CONST. F.
HOROLOGIVM OSCILLATORIVM,
SIVE
DE MOTV PENDVLORVM AD HOROLOGIA APTATO
Demonstrationes Geometricæ.

ANNVS agitur sextus decimus ex quo fabricam horologiorum, tunc recens à nobis inventorum, edito libello publicam fecimus. Ab illo vero tempore cum multa inveneri, mus ad perfectionem operis spectantia, visum est ea singula hoc libro exponere. Quæ quidem adeo ad perfectionem ejus inventi pertinent, ut potissima ejus pars censeri possint, ac velut fundamentum totius mechanicæ hujus, quo prius destituta erat. Mensura enim temporis certa atque æqualis pendulo simplici natura non inerat, cum latiores excursus angustioribus tardiores observentur, sed geometria duce diversam ab ea, ignotamque antea pendulii suspensionem reperimus, animadversa lineæ cujusdam curvaturâ, quæ ad optatam æqualitatem illi conciliandam mirabili plane ratione comparata est. Quam postquam

horologijs adhibuimus, tam constans certasque eorum motus evasit, ut post crebra experimenta terra marique capta, manifestum jam sit & Astronomiæ studijs & arti Nauticæ plurimum in ijs esse præsidij. Hæc ea est linea quam clavus in circumferentia currentis rotæ clavus, continua circumvolutione, in aere designat, a Geometris nostri ævi cycloidis nomine donata, & ob alias multas tui proprietates diligenter expensa, a nobis vero propter eam quam diximus mensurandi temporis facultatem, quam nihil tale suspicantes, ac tantum artis vestigiis insistentes, inesse ipsi comperimus. Hanc cum jam pridem amicis horum intelligentibus notam fecerimus (nam non multo post primam horologij editionem animadversa fuit) nunc eandem, demonstratione quam potuimus accuratissima firmatam, omnibus legendam proponimus. Itaque in hac tradenda demonstratione potissima pars hujus libri versabitur. Vbi primum necesse fuit novis nonnullis demonstrationibus stabilire & promovere ulterius viri maximi Galilei de descensu gravium doctrinam, cujus fructus desideratissimus, atque apex veluti summus, hæc ipsa quam invenimus cycloidis est proprietas.

Quæ porro ut ad pendulorum usum aptari posset, nova curvarum linearum consideratio adhibenda fuit, earum scilicet quæ sui evolutione alias curvas generant. Vnde comparatio inter se longitudinis curvarum cum rectis nascitur, quam alterius etiam quam prætens necessitas postulabat protecturus sum, propter theoriæ, ut mihi visum est, elegantiam & novitatem.

Cæterùm ad explicandam Pendulii Compositi naturam, cujus utilitatem in constructione horum automaton demonstro, adjungenda fuit Centrorum Oscillationis contemplatio, a plurimis quidem, sed minus feliciter, hactenus tentata, in qua theoremata complura animadversione, ni fallor, digna reperientur, ad figuras lineares, planas, solidasque pertinentia. Ante hæc omnia vero præmittetur ipsa horologij mechanica constructio, pendulique applicatio, eâ formâ quæ ad usus astronomicos aptissima reperta est, ad cujus instar reliquæ omnes, mutatis quæ opus est, facile ordinari possint.

Quia vero contigit egregio hujus inventi successu, quod fieri plerumque solet, quodque futurum prædixeram, ut plures sese ejus auctores esse cuperent, aut si non sibi ipsis, suæ tamen nationis alicui potius quam nobis eum honorem tribui vellent, iniquis eorum conatibus tandem aliquando occurrendum hic

arbitror. Nec sane aliud fere opponere ijs necesse fuerit præter quam id unum, nempe ante annos sexdecim, cum nec dicto nec scripto cujusquam de horologijs hujusmodi mentio facta esset, aut rumor ullus omnino ferretur, loquor autem de penduli simplicis ata ad horologia translato, nam de Cycloidis additione nemo credo controversiam movebit) constructionem eorum propria meditatione me adinvenisse & perficiendam curasse. Insequenti anno qui nempe hujus sæculi quinquagesimus octavus fuit, delineationem automati descriptionemque typis vulgasse, exemplaria, tum operis ipsius, tum libelli, quaquaversum dimisisse. Nam cum hæc ita omnibus nota sint, ut nec testimonijs eruditorum, nec Batavæ Ordinum actis, quibus possent, confirmari opus habeant, facile apparet quid de illis existimandum sit, qui septem post annis eandem constructionem, quasi a se suisve amicis profectam, libris suis venditarunt. Qui vero Galileo primas hic deferre coaguntur, si tentasse eum, non vero perfecisse inventum dicant, illius magis quam mea laudi detrahere videntur, quippe qui rem eandem, meliore quam ille eventu, investigaverim. Cum autem vel ab ipso Galileo, vel a filio ejus, quod nuper voluit vir quidam eruditus, ad exitum perductam fuisse contendant, horologiaque ejusmodi re ipsa exhibita, nescio quomodo sibi creditum insperent, cum vix veritimile sit adeo utile inventum ignoratum manere potuisse annis totis octo, donec à me in lucem ederetur. Quod si dedita opera celatum fuisse dicant, idem hoc intelligunt a quolibet alio posse obtendi, qui sibi originem inventi arrogare cupiat. Itaque probandum quidem id foret, neque eo magis ad me tamen quicquam pertineret, nisi una quoque offerretur, id quod omnes latebat, mihi soli innotuisse. Et hæc quidem necessariæ defensionis causa dicenda fuere. Nunc ad ipsius automati constructionem pergamus.

FIG. I.

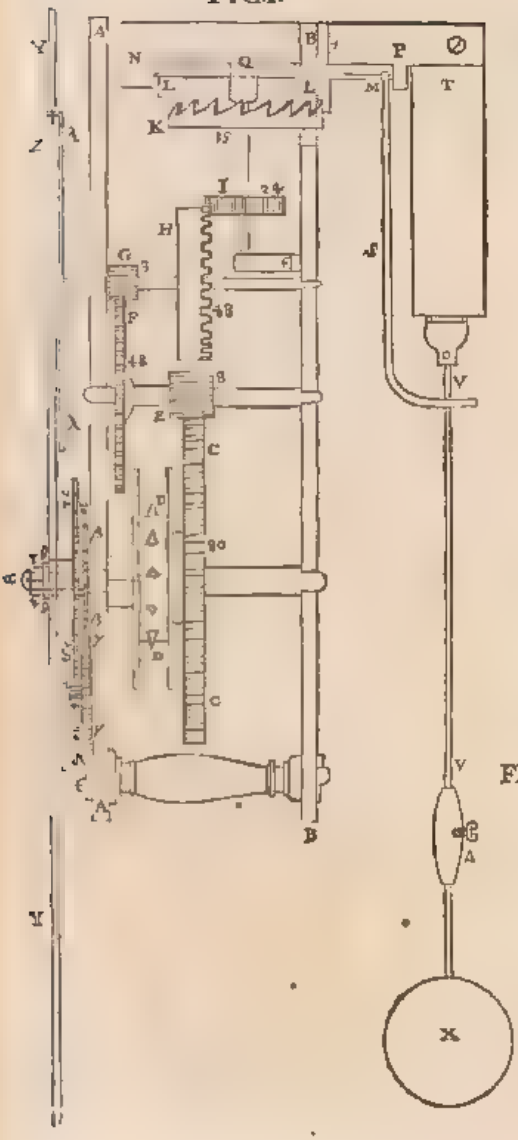
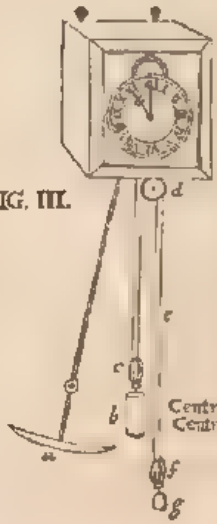


FIG. II.

FIG. IV.

FIG. III.



HOROLOGII OSCILLATORII

PARS PRIMA,

Descriptionem ejus continèns.

FIGVRA adscripta horologium à latere inspiciendum præbet, ubi primum laminæ binæ sunt A A, B B, semipedali aut paulo altra longitudine, latæ pollices duo & semis, quarum anguli quatuor columellis coaptantur, ut sesquipollice inter se distent. His laminis rotarum præcipuarum axes utrinque inseruntur. Prima atque infima est quæ notatur C, dentibus 80 incisa, cujus axi orbiculus quoque D affixus est, aculeis ferreis asper, ut funem cum appensis ponderibus contineat, quæ qua ratione ordinentur postea dicetur. Ponderis atque vi rota C vertitur, hæc movet proximam tympanum E dentium octo, hanc rotam F eodem axe hærentem, cui dentes 48. Hanc excipit tympanum aliud G, & in eodem axe rota H, quibus dentium numerus idem qui tympano rotæque præcedenti. Sed hæc rota ejus est generis quas a forma coronarias vocant artifices nostri. Hujus dentibus agitatur tympanum I simulque rota K, quæ eodem axe teneatur, ad perpendiculum erecta. Tympano dentes 24, rotæ 15, atque hi ad instar serræ dentium incisi. Supra mediam rotam K transversus jacet axis pinnatus L M, cujus extrema sustinentur inde inde gnomones N Q & P, seorsim affixi laminæ B B. Notanda vero in gnomone N Q pars deorsum prominens Q, quæ oblongo foramine patens transmittit axem L M, simulque retinet eum quem rotæ K tympanoque I communem esse diximus, interiori tui parte gnomoni N innitentem. In lamina B B foramen amplum excavatum est, quo ultra ipsam extendatur axis pinnatus L M, qui subtili cuspide internis gnomoni P, liberius ea moveatur quam si abripia lamina B B sustineretur simulque ultra eam prominere, debet enim prominere necessario ut affigi possit clavula S, quæ simul cum eo versationes faciat. Est autem hic motus reciprocus, nunc in hanc nunc in illam partem, quum dentes rotæ K alternatim occurrant pinnulis L L, notâ vulgo ratione, quæque proinde diligentiori explicatione non indiget.

Descriptio Horologii

Porro clavula S, ima sui parte reflexa ac foramine oblongo terebrata, penduli virgam ferream, cui plumbum X affixum est, amplectitur. Hæc vero virga superne duplici filo suspensa est inter geminas lamellas, quarum una T hic tantum cernitur, itaque alteram figuram juxta descripsimus, quæ utriusque formam flexumque & totam hanc suspendendi pendulum rationem exprimeret. Quanquam de vera laminarum illarum curvatura pluribus postea agendum erit.

Nunc autem ut de motu horologii dicamus, nam reliquas figuræ partes postea exequemur, facile equidem apparet & vi rotarum, a pondere tractarum, perpendiculi V X motum sustentari, postquam semel manu mensatum fuerit, & simul perpendiculi stratos recursus rotis universis, totique adeo horologio movendi legem normamque præscribere. Clavula enim, quantumvis levi rotarum impulsu acta, non tantum obsequitur trahenti perpendiculo, sed & singulis recursibus paulisper ejus motum adjuvat, atque ita perennem reddit, qui alioqui sua sponte, vel ventus occursu aeris, deficeret paulatim, vergeretque ad quietem. Rursus vero, quum ejusmodi sit natura pendulum ut eodem semper tenore feratur, neque ab eo ulla ratione præterquam mutata longitudine dimoveri possit, utique postquam flexu lamellarum, inter quas suspensum est, æqualitatem illam consequuti sumus, nequaquam permittit rotæ K, ut nunc citius nunc tardius incedat, ceu fere, ut in vulgaribus horologiis, id facere conetur, sed necessario singuli dentes ejus coguntur æqualibus mensure temporibus. Hinc vero manifestum est, & reliquarum quæ præcedunt rotarum, & denique etiam indicum æquabiles conversiones effici, cum omnia proportionaliter moveantur. Quinobrem si quid in fabrica vitii fuerit, vel, ob aeris mutatam tenuitatem, difficilius rotarum axes volvantur, dummodo non eo usque ut omnis horologii motus interrumpatur, nulla propter hæc inæqualitas aut motus retardatio timenda erit, semperque aut recte tempus metietur aut omnino non metietur.

Indices porro hoc pacto circumagunt ut atque ordinantur. Tertia lamina prioribus parallela est Y Y, pollicis quarta parte distans ab ea quæ notatur A A. In ea circuli horarii descripti sunt centro eodem X quo protenditur axis rotæ C. Quorum circulorum interior duodecim horarum divisionem habet, alter scrupulorum 60. Axi vero rotæ C aptatur, ultra laminam A A, rota G, tubulo coherens qui usque ad E continuatur trans laminam Y Y, atque ita

insidet axilli, ut una cum illo circumferatur, sine illo tamen, ubi opus fuerit, converti possit. Ad E index imponitur, horæ spatio circaiturus atque ita scrupula prima, seu sexagesimas horarum, demonstraturus. Rota vero quam diximus β, aliam rotam, totidem quot ipsa habet dentium, impellit, atque una affixum ei tympanum cui dentes sex, circulo eorum communi hinc lamina A, inde gnomone ε fulsulto. Hoc tandem tympano rota ζ moveturdentes habens 72, tubulumque affixum qui & ipse ultra laminam Y ad θ porrigitur, paulo citra quam desinit tubulus rotæ β, quem intra se complectitur. Parte extrema θ apponitur horarius index, brevior aliquanto illo quem scrupula prima signare diximus, cum interiore gyro ferri debeat. Secunda vero scrupula ut absque errore demonstrentur, imponitur axi rotæ H, atque ad laminam Y producto, orbis λ, cui circulus in sexaginta partes divisus inscribitur, incisoque in lamina Y foramine ad Z, ex divisione, cuspide in summo foramine defixa, præteriantes notantur. Hæc vero tota indicum circulorumque horariorum dispositio ex figura minori clarius perspicitur, exteriorem horologii formam referente.

Cæterum penduli longitudinem, rotis quemadmodum diximus ordinatis, eam esse oportet ut scrupula secunda singulis recursibus metiatur, quæ longitudo tripedalis est, eumque commodè in semimate exhiberi requirit, ejus quintam partem a suspensione summa, ubi incipit flexus laminæ T, adutique centrum ponderis X expressimus. Tripedalem dico, non alicujus respectu pedis qui apud Europæ gentem hanc illamve in usu sit, sed certo æternoque pedis modulo ab ipsa hujus penduli longitudine desumpto, quem PEDEM HORARIUM in posterum appellare decrevi, ad illam enim omnium aliorum pedum mensuræ referri decent quas incorruptas posteris tradere voluerimus. Neque enim, verbi gratia, ignorabitur unquam venturis sæculis Parisini pedis modus, dum constabit eum ad Pedem Horarium esse ut 864 ad 881. Sed de hujus mensuræ exactissima constitutione pluribus agemus in iis quæ de Centro Oscillationis. Nunc tempora conversionum in singulis rotis indicioulque obiter designabimus, ut recte omnia ad dentium supra descriptorum numerum quadrare intelligantur.

Ergo una quidem conversione rotæ C, decies circumire apparet rotam F, sexagies vero rotam H, & centies vicies supremam M K: cui quum dentes sint quindecim, isque alternatim pulsentur pin-

Tuba Horologii Hvgeniani.

nulæ L L, una conversione rotæ K numerabuntur ictus 20, quibus respondent totidem ictus redituque penduli V X ideoque conversionibus 120, respondebunt oscillationes simplices 2600, qui numerus est scrupulorum secundorum unam horam efficientium. Itaque horæ tempore semel circumit rota C, cumque ea simul index ad E impositus, qui scrupula prima demonstrat. Et quoniam eodem temporis spatio etiam rota β, & per eam γ, convertitur, cum tyn pantidio suo dentium sex, ad quem numerum duodecuplus est numerus dentium rotæ γ, apparet duodecim demum horis hanc circumduci, totidemque indicem illi conjunctum in θ. Denique cum rotæ H sexaginta conversiones respondere ostenderimus singulis conversionibus rotæ C, hinc illa, una cum affixo orbe λ sexagies in singulas horas circumferetur, hoc est, semel unius scrupuli primi tempore, ideoque partes sexagesimæ orbiculi λ secunda scrupula transitu suo ostendent: atque ita omnia recte se habere manifestum erit. Pondus X in uno perpendiculo libre est, plumbeum totum, vel ancea superficie plumbum continente. Nec tantum metalli gravitate sed & figura insuper prospiciendum (plurimi enim refert, ut quam minimam occasionem ferat impedimentum lentitiæ. Eoque in cylindri jacentis oblongi & utrinque præacuti formam fingitur, qualis cernitur ad *a* schemate horologii minore. Quanquam in his quæ ad navigationem parantur, forma lentis erectæ aptior visa est.

Porro eodem schemate & ponderis alterius *b* quo motus horologii continuatur, suspendendi ratio expectata est, quam, incognitam prius, investigare nobis necesse fuit, ne interim dum furtim retrahitur pondus illud, cessaret vel impediretur aliquatenus horologii cursus, quod hic omnino cavendum erat. Paratur itaque funis continuus atque in se redeuns extremitatibus apte inter se connexis. Is primum orbiculum rotæ infimæ conjunctum, qui in schemate majori notatus est *d*, amplectitur, inde descendens, altera sui parte trochleam *c*, cui pondus *b* appensum est, subit. Hinc super orbiculum *d* ascendit, extremitatem horologio affixam, qui ferreos per circumferentiam aculeos habet, atque inde per ferratis dentibus ita est aptatus ut volvatur tracto fune *e*, nequaquam vero in partem contrariam revolvi possit. Ab hoc orbiculo descendit funis ad alteram trochleam *f*, cui pondus curvum *g* appenditur, quantum sufficit continendo majori *b*, ne aliter quam revoluto orbiculo descendat. Namque a trochlea *f* rursus ad ipsum orbiculum *d*, unde descenderat, funis revertitur. Quibus ita

se

se habentibus, manifestum est semper pondus *b* dimidia sui gravitate conari ut rotas horologij circumagat, nec tunc quidem cessare cum manu funem *e* trahente ascendere cogitur, adeoque horologij motum nusquam interrumpi, nec momentum temporis deperdi. Discrimen hor. lect.

Gravitatis modus in pondere *b* definiri certo non potest, sed quo minor conservando motui sufficerit, eo melius accuratisque fabrefactum automaton arguet. In nostris, quæ optima hactenus habemus, ad sex libras redactum est, posita nimirum orbiculi D diametro pollicari fere, uti exhibita fuit, item perpendiculum pondere trilibri, ac totidem pedum longitudine. Quæ longitudo, ut hoc etiam admoneamus, trans capsam horologij dependet, oblongo foramine perviam, quantum oscillationibus peragendis necesse est. Ipsum vero horologium, ad hominis altitudinem suspensum, horis 10 moveri perseverat.

Superest nunc forma lamellarum describenda inter quas perpendiculum affigi diximus, quarumque ad æquabilem horologio motum præstandum vel præcipua est opera. Absque his enim Pendula simplicis oscillationes (etsi nonnullis aliter visum est) non erant æque diuturnæ, sed breviores temporis ex quæ per minores arcus incedent, idque primùm experimento hujusmodi facile deprehendunt. Si enim illa accipiantur ejusdem longitudinis duo, paribusque in parte ima ponderibus religatis, utrumque horsum suspendatur, tamque alterum eorum procul a linea perpendiculari, alterum parumper duntaxat extrahatur, simulque e manu dimittantur, non diu utrumque simul in partes eadem ferri videbitur, sed præverteret illud cujus exiliores erant recursus. Sed & temporum per quoslibet arcus rationes numeris definiri possunt, certa scientia nixis, & vero quam libuerit propinquis, velut quod tempus descensus per totum circulum quadrantem est ad tempus per arcum minimum fere ut 14 ad 29. Atque ut nequaquam resistentiæ aeris ea diversitas imputanda sit, ut quidam voluere, sed ex ipsa motus natura circuliqué proprietate nascatur. Quod alio quoque argumento concludi potest ex ipsa Pendulorum horologiorum constructione, ubi à circulari linea haud parum receditur, uti mox patebit.

Sed videatur fortasse in nostris horologiis hæc ubi eadem semper est oscillationum latitudo, nullius momenti futura quam diximus inæqualitas, adeoque nec correctione ulla perpendiculi opus fore. Quod sane ita esset si latitudo omnium plane eadem

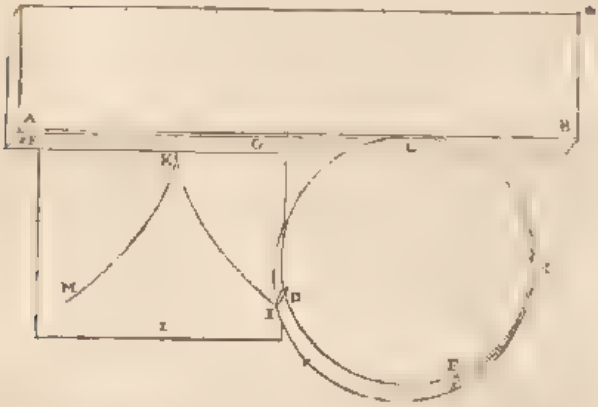
Descriptio Horologii

constanter maneret. Sed cum paxillum quandoque excedat vel deficiat, ex multis minimis differentiis tandem magna fit sensibilis, idque ita esse templa atque experimentis evincitur. Est enim eadem semper sit ponderis vis, rotæ sibi proximæ respectu, tamen per tot axes transfusa, quantacunque cura limata fuerint, non semper eadem ad perpendiculum usque pervenit. Præterquam quod frigore quoque difficilior motus rotarum efficitur, itemque evanescente aut fordescente quod illis additur oleo. Sed præsertim inæquales fiunt oscillationes horologiis quæ mari vehuntur, ob jactationem navis continuam, adeo ut omnibus quidem in universum, sed his maxime omnium remedio opus sit, quo reciprocationum Pendulatiorum angustiorumque tempora æqualia evadant.

Ad definiendam ergo lamellarum formam in quibus positum est remedium illud, in primis Pendulum longitudinem statuisse oportet, quæ facile ex eo habetur, quod sint inter se longitudines perpendiculorum, sicut temporum quæ in singulos recursus impendantur quadrata. Adeo ut cum tribus pedibus definivimus longitudinem perpendiculi quod scrupula secunda metitur, ejus quarta pars, sive unciæ novem debeantur ei quod semisecunda notaturum sit. Item si Pendulum longitudo quæratur, cujus recursus simplices 10000 horæ spatio peragantur, hoc modo ratio inibitur. Pendulum nempe tripedalis semis 3600 recursus in horas singulas numerat: ergo hujus recursuum tempora singula, majora sunt temporibus Pendulum quæsiti, proportione 10000 ad 3600, sive 25 ad 9. Quare ut quadratum numeri 25 ad quadratum 9, hoc est, ut 625 ad 81, ita erit longitudo pedum 3 ad eam quæ quærebatur, nempe unciarum 4 cum $\frac{1}{2}$.

Posita ergo longitudine perpendiculi, pata pedum trium in horologio a nobis proposito, inde Cycloidis linea, quæ curvaturam laminarum T datura est, hoc modo describetur.

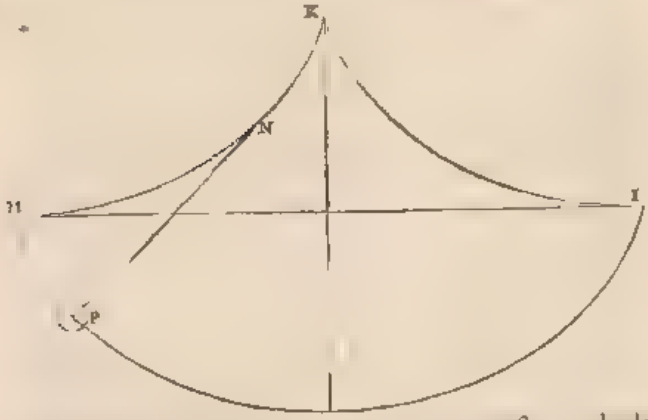
Super tabula plana affigatur regula A B, semidigiti crassitudine. Deinde fiat cylindrus C D E eadem illa altitudine, diametrum vero baseos, dimidiæ perpendiculi longitudini, æqualem habens; sitque F G H E fasciola, seu potius bractea tenuis, affixa regulæ in E, cylindro vero in circumferentiæ puncto aliquo E, ita ut partim huic circumvoluta sit, partim extendatur juxta latus regulæ A B. Cylindro autem infixa sit ferrea cuspis D I, paxillum altra basin inferiorem prominens, atque ita ut circumferentiæ ejus exacte respondeat.



His ita se habentibus, si cylindrus secundum regulam A B volvatur, bracteolæ tantum F G crassitudine intercedente, eaque semper quantum potest extensâ, describet cuspis I in subjecto tabulæ plano lineam curvam K I, quæ Cyclois vocatur. Circulus vero genitor erit C D E, cylindri adhibiti basis. Quod si jam laminam K L ad regulam A B applicuerimus, exaratâ primum in ea cycloidis portione K I, invertemus deinde ipsam, & in superficie adversâ similem lineam K M, ab eodem puncto K egredientem, incidemus. Tum figuram M K I, accurate secundum lineas istas, efformabimus, cui figuræ lamellarum interstitium aptari oportet, inter quas perpendiculum suspenditur. Sufficiunt autem ad horologiorum usum portiones exiguæ arcuum K M, K I, reliquo flexu inutili futuro, ad quem perpendiculi filum accedere non potest.

Verum, ut mirabilis lineæ natura atque effectus plenius intelligantur, integras semicycloides K M, K I, alio schemate hic exprimere visum fuit, inter quas suspensum agitatumque Pendulum K N P, diametri circuli genitoris duplum, cujuscunque amplitudinis oscillationes, usque ad maximam omnium per arcum M P I, iisdem temporibus confecturum sit atque ita, ut appensæ sphæræ P centrum, in linea M P I, quæ & ipsa cyclois integra est, semper versetur. Quæ proprietas insignis, nescio an alii præter hanc lineæ data sit, ut nempe se ipsam sui evolutione describat. Hæc autem quæ dicta sunt, in sequentibus, ubi de descensu gravium, deque evolutione curvarum agemus, singula demonstrabuntur.

Descriptio Horologii.

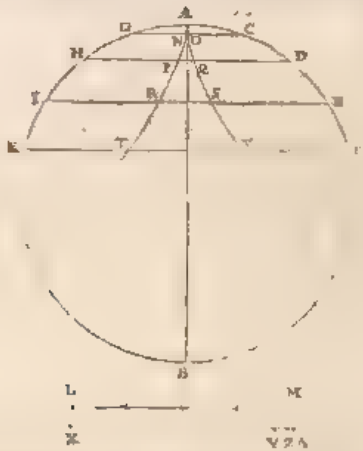


Licebit autem alter quoque, per inventa puncta, cycloidem designare. Describatur circulus diametro A B, quæ dimidiæ longitudini perpendiculi æqualis sit. In cujus circumferentia sumptis partibus æqualibus quotlibet, A C, C D, D E, E F, A G, G H, H I, I K, jungantur G C, H D, I E, K F, quæ erunt inter se parallelæ. Deinde arcui A F sumatur æqualis linea recta L M, eaque in partes æquales totidem dividatur quot sunt in arcu A F, earumque partium uni æquales ponantur singulæ C N, G O in recta C G, duabus vero partibus rectæ L M, æquales fiant singulæ D P, H Q in recta D H. Tribus vero, singulæ E R, I S in recta E I, atque ita porro si partes plures fuerint acceptæ, ac tandem toti L M æquales fiant singulæ F T, K V in linea extrema F K. Jam si curvæ describantur per puncta A O Q S V, A N P R T, hæ rursus quæsitæ cycloidis partes erunt, inter quas perpendiculum affigi oportet.

Recta autem L M æqualis arcui A F invenitur, si primum duabus rectis, quæ semissibus arcus A F subtendunturæqualis ponatur X Y, totius vero arcus subtensæ A F æqualis ab eodem termino accipiatur X Z, differentiæque Y Z triens Z Δ ad totam X Z adponatur. Nam tota X Δ toti arcui A F tam prope æqualis erit, ut licet sextans fuerit circumferentiæ, (neque major hic unquam requiritur) non una sexies millesima parte suæ longitudinis deficiat, uti in his, quæ de Circuli Magnitudine antehac scripsimus, demonstratum est.

Expletis quæ ad horologii fabricam attinent, nunc quoque illud declarandum est, quo pacto ad veram horarum mensuram componi debeat. Ergo primum, an recte se habeat motus ejus, hoc modo examinabitur.

Descriptio Horologii.



Oculo observatoris certus eligatur locus, unde sidera despici possint, simulque tecta parietesve vicinarum ædium, sic posita, ut, cum eo appulerint stellæ quædam è fixarum numero, simul videri desinant. In loco foramen, ad pupillæ magnitudinem, constituatur, ut sequentibus diebus, absque errore, oculus ad idem punctum reponi possit. Iam ad momentum ipsum, cum stellarum aliqua è conspectu abit, notetur tempus horologio indicatum. Atque idem postero die, vel potius aliquot diebus intermissis, fiat. Quod si tantum unius diei spatium duabus observationibus intercesserit, oportet in postrema observatione tempus horologii deficere ab illo, quod prima observatione annotatum fuerat, scrupulis primis 3, secundis 56. Ita enim recte se habere perpendiculi longitudinem constabit, quum tanto superetur quælibet siderum fixorum revolutio a die solari mediocri. Mediocri dico, quoniam dies solares, de medie ad meridiem, non omnes inter se æquales sunt, ut mox amplius exponetur. Si vero post plures demum dies observatio repetatur, in singulos tantundem differentiæ causa computandum erit. Sit, exempli gratia, in prima observatione, ad momentum evanescentis stellæ, adnotata horolog. hora 9, cum scrupulis primis 30, secundis 18, deinde, septimo post die, eadem disparente stella, indicet horam 8, cum scrupulis pr. 50, sec. 24. Hæc hora deficit a priore scrupulis pr. 39, secundis 54. Quæ, in septem divisa, dant retardationem diurnam scrupulorum 5. 42. Debebat autem esse scrupulorum 3. 56. quæ nil minor est scrupulis 1. 47

Descriptio Horologii

Itaque tantundem quotidie deficit horologium à vera, seu media, dierum mensura.

Cæterum alio quoque modo, ad solem, horologii motum examinare licebit. Sed hic jam inæqualitatis dierum naturalium ratio habenda erit. Sunt enim, ut jam dixi, non omnes ejusmodi dies inter se æquales, & quanquam exiguum sit discrimen, tamen plurium dierum intervallo sæpe eo usque excrescit, ut haudquaquam contemni possit. Etenim si & solarium quam perfectissime descriptum habeatur, & horologii automati motus ad verissimam dierum mensuram exactus sit, neque ab ea recedat, eveniet tamen necessario ut, certis anni temporibus, sæpe horæ quadrante, aut etiam semihora, inter se discrepent, ac rursus statis temporibus ultro concordent. Hoc enim ita esse, ex tabula temporis æquatoria quam subjicimus, intelligetur, postquam usum ejus ostenderimus, qui est hujusmodi.

Accipiatur æquatio tabulæ, assignati diei qua primum cum sole, sive cum solorhetico, horologium ut conveniret fecimus. Item que æquatio diei, quæ quæritur quam bene ad dierum mensuram temperatum sit. Quod si jam prior æquatio major fuerit sequente, superare debebit hora automati horam gnomonis eo, quo inter se æquationes istæ differunt. At si posterioris diei æquatio major inveniatur, erit excessus partes horam gnomonis, sive eam quæ ex sole observatur. Ut si, exempli gratia, die 5 Martii in eandem horam conveniant solorhetricum horologium atque automaton, cujus diei æquatio invenitur, in tabula, scrupulorum primorum 4, secundorum 11 subtractæque serie ejusdem mensis die 20, an automaton horas æquales recte metiatur necne: invenietur die posteriori adscripta æquatio scrupulorum primorum 7, secundorum 27 quæ quia superat præcedentem scrupulis primis 4, secundis 16, debebit tanto serior esse hora solorhetici, quam quæ automato indicatur. Vnde, si diversam reperiatur, facile inde colligetur, quantum in dies singulos exuperet automaton, aut retardet.

In computanda tabula hac duplicem causam adhibui, utramque Astronomis notam, Eclipticæ nimirum obliquitatem, & solaris motus anomaliam. Quod cum ratio postulat, tum experientia quoque, his ipsis horologiis superstructa, quæque sine his nequaquam haberi poterat, evenit, quandoquidem, cum æquatione hic proposita, observationes solis, quas sæpe per complures menses, quotidie ad momentum quo meridianum circulum sol occuparet, instituimus, planissime consentire inventæ sunt.

TABULA ÆQUATIONIS DIERUM.

Dies	Ianuar. Min.	Ianuar. Sec.	Febr. Min.	Febr. Sec.	Mart. Min.	Mart. Sec.	Apr. Min.	Apr. Sec.	Mai. Min.	Mai. Sec.	Iun. Min.	Iun. Sec.
1	10	40		51	1	31	11	18	18	32	18	10
2	10		0	44	1	18	11	17	18	37	18	1
3	9	41	0	18	1	42	11	14	18	46	17	51
4	9	11	0	11	1	56	11	1	18	55	17	42
	8	41	0	5	1	1	11	14	19	7	17	30
6	8	13	0	0	1	26	11	31	19	4	17	19
7	7	0	0	1	1	41	11	11	19	9	17	8
8	7	21	0	1	1	56	11	31	19	14	16	57
9	6	38	0	0	2	11	11	49	19	18	16	45
10	6	14	0	0	2	29	11	6	19	23	16	33
11	6	10	0	0	2	46	11	21	19	25	16	24
12	5	47	0	2	3	4	11	39	19	28	16	13
13	5	24	0	4	3	22	11	11	19	29	16	3
14	5	2	0	8	3	41	11	16	19	29	15	49
15	4	41	0	12	3	58	11	25	19	29	15	37
16	4	21	0	16	4	16	11	33	19	28	15	24
17	4	2	0	21	4	31	11	41	19	26	15	11
18	3	44	0	26	4	51	11	46	19	24	14	58
19	3	27	0	32	5	9	11	51	19	21	14	45
20	3	11	0	40	5	27	11	54	19	18	14	32
21	2	5	0	48	5	41	11	47	19	15	14	19
22	2	19	0	57	5	1	11	39	19	11	14	6
23	2	15	1	6	6	12	11	31	19	7	13	53
24	2		1	16	6	41	11	21	19	1	13	40
25	2	12		26	6	1	11	11	18	57	13	27
26	1	8	1	37	7	21	11	43	18	51	13	15
27		11	1	49	7	41	11	11	18	44	13	3
28	1	1	1	1	8	1	11	1	18	9	12	52
29		1			10	11	11		18	11	12	41
30		11			11	4	11	11	18	11	12	30
31	11	41			10	59			18	12		

Dies	Iul. Min.	Iul. Sec.	Aug. Min.	Aug. Sec.	Sept. Min.	Sept. Sec.	Oktob. Min.	Oktob. Sec.	Nov. Min.	Nov. Sec.	Dec. Min.	Dec. Sec.
1	1	19	11	4	16	11	16	50	11	1	15	14
2	11	8	11	8	16	44	16	49	1	1	11	10
3	11	18	11	15	17	1	17	8	11	14	14	45
4	1	45	11	11	17	31	17	14	11	31	14	10
5		11	11	13	17	41	17	41	11	11	11	15
6	11	1	11	11	18	1	18	11	11	47	13	31
7	11	15	11	34	18	21	18	16	11	46	13	4
8	11	9	11	41	18	4	18	31	11	17	12	18
9	11	1	11	49	19	1	18	41	11	11	12	11
10	11	11	11	11	19	11	19	1	11	11	11	43
11	11	47	11	1	19	41	19	16	11	15	11	14
12	11	47	11	16	11	1	19	31	11	5	10	44
13	11	11	11	11	20	22	19	41	11	11	10	14
14	11	15	11	16	20	41	19	16	11	41	19	44
15	11	19	11	41	21	4	11	9	11	11	19	14
16	11	15	11	1	21	15	11	21	11	10	18	44
17	11	7	11	14	21	17	11	14	11	8	18	14
18	11	1	11	11	22	9	11	41	11	11	17	44
19	1	11	11	41	22	31	11	15	11	41	17	14
20	9	14	11	17	21	51	17	4	11	13	16	44
21	9	31	11	31	11	15	11	11	11	6	16	16
22	9	49	1	1	15	1	11	19	11	11	15	44
23	9	47	1	41	15	11	11	16	11	30	11	14
24	9	46	11	9	14	11	11	11	11	11	14	43
25	9	46	14	11	14	11	11	11	11	11	14	11
26	9	46	14	11	14	11	11	43	11	50	11	41
27	9	47	14	10	15	11	11	47	11	8	15	10
28	9	48	11	8	15	51	11	50	11	41	11	40
29	9	11	15	16	11	51	11	11	11	41	11	10
30	9	6	15	41	16	1	11	55	15	11	11	40
31	10	6	16	4			11	11			11	10

Iam postquam utrovis modo eorum quos diximus, sed priore potius, examen institutum fuerit, si multum aberrare a media eorum longitudine horologium reperiatur, adeo ut differentia ultra tria quatuorve prima scrupula accidat, remedium adhibebitur aucta aut diminuta ipsius pendulo longitudine. Vbi hæc tenenda est regula, tot scrupulis primis, in singulos dies, motum horologij accelerandum aut retardandum fit, quot unius lineæ auferentur pendulo aut addentur. Cumque ad veram mensuram hoc pacto jam prope reductum erit, reliqua correctio transpositione exigui ponderis Δ, virgæ V V adhærentis, commode peragetur. Id pondus lentis formam habet, cujus sectionem secundum axem in figura I expressimus. Et quia tantum vicesimam tricesimamve partem æquat ponderis X, hinc fit ut sat magnus spatius e priore loco discedens, haud multum tamen perpendiculi motum afficiat, accelerando nempe quoties versus medium virgæ longitudinem attrahitur, retardando cum inde sursum aut deorsum movetur. Ne vero diu punctum illud quærendum sit quo verissima datarum sit dictum mensuram, dividimus certa ratione, ex motus legibus petita, inferiorem virgæ medietatem, posito minimum pondere Δ parte quinquagesima ponderis X, parique gravitate ipsius virgæ V V. Quæ quidem divisiones figura IV exhibentur, ubi pendulum sortio interior in tres partes secta cernitur, quarum, quæ infimo loco ponenda, est A B. Punctum A est centrum gravitatis ponderis X, a puncto autem C, partes singulæ, quindecim scrupulorum primorum differentiam diurnam efficiunt, ubi tali intervallo mota fuerit lens Δ. Demonstratio autem divisionumque inventio, dabitur in his quæ de Centro Oscillationis.

Cæterum illorum quoque quæ mari vehuntur, longitudinum investigandarum gratia, fo mam hic deliberemus, si quæ nam maxime ad hunc usum accommodata sit, æque ac in præcedentibus, exploratum determinatumque haberemus, etsi quidem jam nunc res deducta sit, ut parum deesse videatur ad perficiendum tantæ utilitatis inventum. Quid autem & qua fortuna hic tentatum fuerit, quidve deinceps tentandum restet, exponere non pigebit.

Prima duo hujusmodi horologia Britannica navi vecta fuere anno 1664, quæ vir nobilis e Scotia nobisque amicus ad nostrorum exemplum fabricari curaverat. Hæc ponderis loco laminam chalybeam habebant in spiram convolutam, cujus vi rotæ circumagerentur,

cumagerentur, quemadmodum in exiguis illis quæ circumferri solent automatis adhiberi solent. Vt autem jactationem navis perferre possent, è chalybea pila, cylindro æneo inclusa, horologia suspenderat, clavulamque quæ pendulum motum continuat (erat autem semipedali longitudine pendulum) deorsum productam geminaverat, ut literæ F inversæ formam referret, ne videlicet in gyrum evagari posset pendulum motus, unde cessationis periculum. Navis hæc, cum tribus aliis quas itineris socias habuerat, postquam in Britanniam reversa est, Præfectus classis hæc retulit. Se nempe, cum a Guineæ littore solvisset, atque ad insulam, sancti Thomæ dictam, pervenisset, quæ æquinoctiali circulo subjacet, compositis hinc ad solem horologiis, occidentem versus cursum instituisse, atque ad septingenta circiter milliaria continuo tramite progressum, tum rursus vento favente Libonoto ad Africæ littora decinavisse. Cum autem ad ducenta trecentave milliaria eo cursum tenuisset, magistros aliarum navium, veritos ne priusquam Africam attigissent aqua ad potum deficerentur, suasisse ut ad insulas Americanas, Barbarorum dictas, aquandi gratia deflecterent. Tum sese concilio nauclerorum habito, jussisque ut Ephemeridas ac supputationes singuli suas proferrent, reperisse cæterorum calculos a suis diversos abire, unius quidem 80 milliaribus, alterius centenis, tertii amplius etiam. Ipsum vero, cum ex horologiorum indicio collegisset non amplius quam triginta circiter milliaribus abesse insulam *del Fuego* dictam, quæ una est earum, non procul ab Africa distantium, quæ à Viridi promontorio nomen habent, eamque postero die tenere posse, confisum pendulis suis eo cursum dirigi imperasse, ac die insequenti sub meridiem eam ipsam in conspectum venisse insulam, paucisque post horis navibus stationem præbuisse. Et hæc quidem ex Præfecti illius relatu.

Ab eo vero tempore aliquoties tum Batavorum tum Gallorum opera, idque Regis Serenissimi jussu, repetita fuere experimenta, vario eventu, sed ita ut sæpius negligentia eorum quibus horologia commissa erant quam ipsamet automata culpari possent. Optimus vero successus fuit in Mediterraneo mari, expeditione in Cretam insulam, quo illustrissimus Dux Beltortius, Candiæ a Turcis obsessæ auxilium laturus, cum Gallorum copiis missus erat, ubi & in prælio occubuit. Is in ea qua vehebatur navi, horologia hujusce experimenti gratia habebat, virumque Astronomiæ peritum iis præfecerat, e cujus observationibus, in singulos dies habitis, longitudines locorum ad quæ in ea profectione aut appulerunt na-

De exactio horologiorum.

ves, aut quæ prætervecti dignoscere oculis potuerant, horologiorum opera exacte dimensas fuisse comperimus, atque ita ut Geographicis descriptionibus quæ in horis notæ habentur, ex eadem longitudinum differentia designata reperiantur. Namque inter Tolom portum Candiamque oppidum differentia horarum scrup. 22' reperta fuit, hoc est graduum longitudinis 20, scrup. 30. ac rursus a Candia Tolonum revertentibus differentia proxime eadem, qui consensus certissimum veritatis est indicium.

Inter eandem Tolonii portum & insulam quandam cui *Mareteno* nomen est, prope promontorium Siciliæ quod Occidentem spectat, Lilybæum olim vocatum, differentia horarum observata est scrup. primi 25, sec. 21, quibus respondent gradus longitudinis 6, scrup. 20. Item a Tolono ad insulam *Sapienza* dictam, quæ juxta Peloponnesum est Occidentem versus, hora 1, scrup. prima 5, sec. 45', quibus respondent longitudinis gradus 16, scrup. 26.

Horologia ad solem examinata fuerant, mane ad Orientem, vespere ad Occidentem, supputato ex data poli altitudine utroque temporis momento. Atque hæc ratio cum naves in anchoris stant omnium optima videtur, quod, absque instrumentorum ope, solis oculis eæ observationes peragantur.

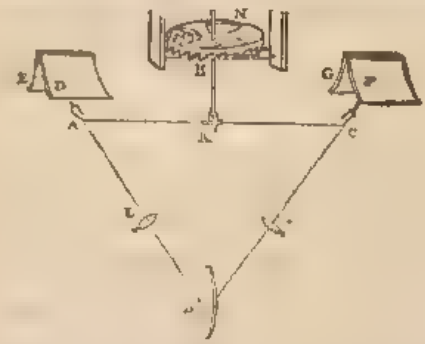
Pendulum vero uncialarum novem longitudine inerat horologiis hisce, pondere semissis. Rotæ pondera attractu circumrebantur, eademque cum illis theca inclusæ erant quaternum pedum longitudine. In ima theca plumbum insuper centum atque amplius librarum additum erat, quo melius perpendicularem situm suspensa in navi machina servaret.

Quanquam autem æqualis admodum sibique constans automati motus per hæc experimenta comperiebatur, tamen alia quoque ratione ulterius illud perficere aggressi sumus, quæ erat hujusmodi. Rotæ illi quæ serratos dentes habet, penduloque proxima est, pondus exiguum ex catenula affabre constructa appendimus, quo sola ipsa moveretur, rel qua omni machina nihil aliud agente quam ut singulis semiscrupulis horarius plumbum illud exiguum ad priorem altitudinem restitueret. eadem fere ratione atque in constructione horologii superius exposita videre est, ubi pondus altero fune attollitur, dum altero gravitatem suam horologii motui impertit. Quibus ita constructis, cum velut ad unicam rotam omnia essent redacta, major adhuc quam antea apparuit horologiorum æqualitas, illudque accidit memoratu dignum, quod cum duo ad hanc formam constructa ex eodem tigno suspendissemus, tignum vero funeris duobus impositum esset, motus pendul

utriusque ictibus adversis inter se consensere, ut nunquam in de vel minimum recederent, sed utriusque sonus una semper exauditetur: imo si data opera perturbaretur concordia illa, semet ipsam brevi tempore reduceret. Miratus aliquandiu rem adeo insolitam, invenit denique, institutaque diligenti examine, à motu tigni ipsius, licet haudquaquam sensibili, causam petendam esse. Nempe pendulorum reciprocationes horologius, quantolibet pondere gravatis, motum aliquem communicare, hanc vero motum, tigno ipsi impressum, necessario efficere ut si aliter quam contrariis ad unguem ictibus pendulum utrumque moveatur, eo tamen necessario tandem deveniant, ac tum demum tigni motum penitus interquiescere. Quæ tamen cauta non satis efficacia haberet, nisi & horologiorum motus a iunde æquabilissimus foret atque inter se consentiens.

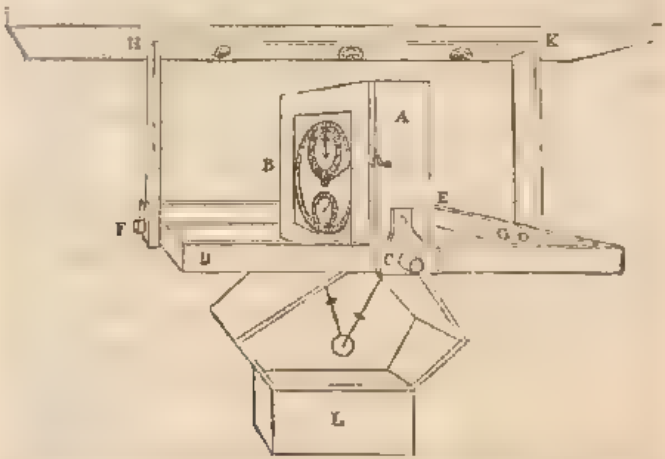
De Ratio Horolog.

Cæterum experimentis in Oceani navigatione habitis, ac præsertim procella vehementiore aquas agitante, compertum fuit primam ac præcipuam curam de motu horologiorum absque interruptione conservando habendam esse, quod jactationem navis tantam ægre tunc perferre illa animadvertum sit. Quamobrem nova denique ratione & penduli formam immutavimus, & aliter horologia ipsa suspendimus. Pendulum trianguli formam habet, in



cujus vertice deorsum spectante plumbea lens affixa est. Anguli utrique reliqui duo inter laminas cycloidales suspensi sunt. Basis clavulam bifurcatam puncto sui medio recipit ab eaque movetur, illa vero a rota ferrata horizonti parallela motum accipit. Motus rotarum omnium non a pondere sed a chalybea lamina, tympano inclusa, principium habet. In figura adjecta pendulum triangulare est A B C, lens plumbea L, laminæ cycloidales E D, F G. Clavula

Descriptio horologii bifurcata H K, rota ferrat s dentibus N, quæ cæteris horologii rotis inferior est. Lenticulæ ad temperandum penduli motum I I.



Suspensionis modum altera hæc figura exhibet, ubi theca A B axibus primum duobus, quorum alter C tantum apparet, rectangulo ferreo D E inserta est; quod deinde rectangulum rursus axibus suis F G ferreo gnomone E H K G sustinetur, qui contignationi navis immobiliter affixus est in ima theca pondus 50 librarum appensum est. Quibus ita se habentibus, quacunque navis inclinatione perpendicularem positum servat horologium. Axis autem C, cum sibi opposito, ita collocatus sunt, ut ad rectam lineam respondeant punctis suspensionum penduli ejus quod diximus quo fit ut motus ipsius oscillatorius machinam nequaquam commovere possit, quo nihil est alioqui quod magis penduli motum destruat. Porro axium C C, & F G crassitudo, quæ pollicem æquat, gravitasque plumbi inferius appensi, nimiam movendi libertatem horologio adimunt, faciuntque ut si forte succussu navis gravior commotum fuerit, continuo ad quietem perpendiculumque suum revertatur.

Et hæc quidem ita adaptata machina ut in mare deducatur experientiæque committatur superest, quæ & certam pene successus spem præbet, quod iis quæ hactenus instituere licuit experimentis, multo melius quam priores illæ omnem motus diversitatem perferre reperta sit.

HOROLOGII OSCILLATORII

PARS SECVNDA.

De descensu Gravium & motu eorum in Cycloide.

HYPOTHESES.

I.

SI gravitas non esset, neque aer motui corporum officeret, unum quodque eorum, acceptum semel motum continuaturum velocitate æquabili, secundum lineam rectam.

II.

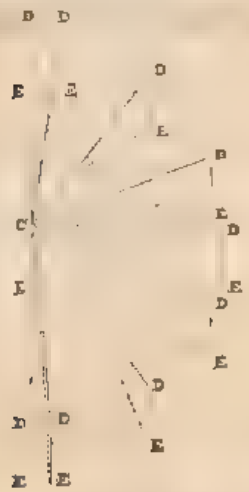
Nunc vero fieri gravitatis actione, undecunque illa oriatur, ut moveantur motu composito, ex æquabili quem habent in hanc vel illam partem, & ex motu deorsum à gravitate profecto.

III.

Et horum utrumque seorsim considerari posse, neque alterum ab altero impediri.

Ponatur grave C e quiete dimissum, certo tempore, quod dicatur F, vi gravitatis transire spatium C B. Ac rursus intelligatur idem grave accepisse alicunde motum quo, si nulla esset gravitas, transiret pari tempore F motu æquabili lineam rectam C D. Accedente ergo vi gravitatis non perveniet grave ex C in D, dicto tempore F, sed ad punctum aliquod E, recta sub D situm, ita ut spatium D E semper æquetur spatio C B, ita enim, & motus æquabilis, & is qui a gravitate oritur suas partes peragent, altero alterum non impediente. Quamnam vero lineam, composito illo motu, grave percurrat, cum motus æquabilis non recta sursum aut deorsum sed in obliquum tendit, è sequentibus definiri poterit. Cum vero deorsum in perpendiculari contingit motus æquabilis C D,

De descensu gravium.



apparet lineam C D, accedente motu ex gravitate, augeri recta D E. Item, cum sursum tendit motus æquabilis C D, ipsam C D diminui recta D E, ut nempe, peracto tempore F, grave inveniatur semper in puncto E. Quod si, utroque hoc casu, seorsim, ut diximus, duos motus consideremus, alterutrique ab altero nullo modo impediri cogitemus, ante jam accelerationis gravium cadentium causam legesque reperire licebit. Et primum quidem duo ista simul ostendemus,

PROPOSITIO I.

Æqualibus temporibus æquales celeritatis partes gravi cadenti accrescere, & spatia æqualibus temporibus ab initio descensus emensa, augeri continue æquali excessu.

Ponatur grave aliquod, ex quiete in A, primo tempore lapsum esse per spatium A B, atque ubi pervenit in B, acquisivisse celeritatem qua deinceps, tempore secundo, motu æquabili, percurrere posset spatium quoddam B D. Scimus ergo spatium secundo tempore peragendam majus fore spatio B D, quia vel cessante in B omni gravitatis actione spatium B D percurreretur. Feretur vero motu composito ex æquabili quo percursurum esset spatium B D, & ex motu gravium cadentium, quo deprimi necesse est per spa-

tum ipsi A B æquale. Quare ad B D addita D E, æquali A B, secundo tempore secundo grave perventurum ad F.

A B D E F C H K

Quod si vero inquiramus quam velocitatem habeat in E, in fine secundi temporis, eam inveniemus duplam esse debere velocitatis quam habebat in B fine temporis primi. Diximus enim moveri composito motu ex æquabili cum celeritate acquisita in B, & ex motu a gravitate producto, qui cum tempore secundo idem plane sit ac primo, ideo decursu temporis secundi æqualem celeritatem gravi contulisse debet atque in fine primi. Quare cum acquisitam in fine primi temporis celeritatem conservaverit integram, apparet in fine secundi temporis bis tam celeritatem habere quam acquisiverat in fine temporis primi, sive duplam.

Quod si jam, postquam pervenit in E, pergeret deinceps tantum moveri celeritate æquabili, quantam illic acquisivit, apparet tempore tertio, prioribus æquali, percurrurum spatium E F, quod duplum futurum sit spatii B D, quia hoc percurrit dimidia hujus celeritatis, motu æquabili, & temporis parte æquali. Accedente autem rursus gravitatis actione, percurret tempore tertio, præter spatium E F, etiam spatium F G, ipsi A B vel D E æquale. Itaque in fine tertii temporis grave inveniretur in G. Velocitatem vero hic habebit triplam jam ejus quam habebat in B, in fine primi temporis: quia præter celeritatem acquisitam in E, quam diximus duplam esse acquisitæ in B, vis gravitatis, temporis tertii decursu, æqualem rursus atque in fine primi celeritatem contulit. Quamobrem utraque celeritas, in fine temporis tertii, triplam celeritatem constituet ejus quæ fuerat in fine temporis primi.

Eodem modo ostendetur tempore quarto peragi debere & spatium G H triplum spatii B D, & spatium H K ipsi A B æquale: velocitatemque in K, in fine quarti temporis, fore quadruplam ejus quæ fuerat in B, in fine temporis primi. Atque ita spatia quotidie deinceps considerata, quæ æqualibus temporibus peracta fuerint, æqualiter excessu, qui ipsi B D æqualis sit, crescere manifestum est: simulque etiam velocitates per æqualia tempora æqualiter augeri.

Bibliothèque nationale de France

De descensu gravium

PROPOSITIO II.

Spatium peractum certo tempore à gravi, è quiete casum inchoante, dimidium est ejus spatii quod pari tempore transiret motu æquabili, cum velocitate quam acquisivit ultimo casus momento.

Ponantur quæ in propositione præcedenti, ubi quidem A B erat spatium certo tempore, à gravi cadente ex A, peractum B D vero spatium quod pari tempore transiit intelligebatur celeritate æquabili, quanta acquisita erat in fine primi temporis, seu in fine spatii A B. Dico itaque spatium B D duplum esse ad A B.

Quum enim spatia primis quatuor æqualibus temporibus à cadente transmissa sint A B, B E, E G, G H, quorum inter se certa quædam est proportio: si eorum temporum dupla tempora sumamus, ut nempe pro primo tempore jam accipiantur duo illa quibus spatia A B, B E, peracta fuere, pro secundo vero tempore duo reliqua quibus peracta fuere spatia E G, G K, oportet jam spatia A E, E K, quæ sunt æqualibus temporibus à quiete peracta, inter se esse sicut spatia A B, B E, quæ æqualibus item temporibus à quiete percurrebantur.

Quum igitur sit ut A B ad B E, ita A E ad E K, & convertendo, ut E B sive D A ad A B ita K E ad E A, erit quoque, dividendo, D B ad B A ut excessus K E supra E A ad E A. Quum sit autem, ex ostensis propositione præcedenti, K E æqualis tum duplæ A B, tum quintuplæ B D: E A vero æqualis tum duplæ A B, tum simplici B D, apparet dictum excessum K E supra E A æquari quadruplæ B D. Sicut igitur D B ad B A ita erit quadrupla D B ad E A: unde E A quadrupla erit ipsius B A. eadem vero E A æquatur, ut diximus, & duplæ A B & simplici B D ergo B D duplæ A B æqualis erit; quod erat demonstrandum.

PROPOS.

PROPOSITIO III.

Spatia duo, à gravi cadente quibuslibet temporibus transmissa, quorum utrumque ab initio descensus accipiatur, sunt inter se in ratione duplicata eorundem temporum, sive ut temporum quadrata, sive etiam ut quadrata celeritatum in fine cujusque temporis acquisitarum.

Quum enim ostensum sit propositione antecedenti spatia A B, B E, E G, G K, quotcunque fuerint, æqualibus temporibus à cadente peracta, crescere æquali excessu, qui excessus sit ipsi B D æqualis. Patet nunc, quoniam B D est dupla A B, spatium B E fore triplum A B, E G quintuplum ejusdem A B, G K septuplum, aliique deinceps auctum in secundum progressionem numerorum imparium ab unitate, 1, 3, 5, 7, 9, &c. cumque quotuibet horum numerorum, sese consequentium, summa faciat quadratum, cujus latus est ipsa adsumptorum numerorum multitudo (velut si tres primi addantur, facient novem, si quatuor sexdecim) sequitur hinc spatia, à gravi cadente transmissa, quorum utrumque à principio casus inchoatur, esse inter se in ratione duplicata temporum, quibus casus duravit, si nempe tempora commensurabilia sumantur.

Facile autem & ad tempora incommensurabilia demonstratio extendetur. Sint enim tempora hujusmodi, quorum inter se ratio ea quæ linearum A B, C D spatiaque temporibus his transmissa sint E, & F, utraque numerum ab initio descensus adsumpta. Dico esse, ut quadratum A B ad quadratum C D, ita spatium E ad F.

Si enim negetur, habeat primo, si potest, spatium E ad F majorem rationem quam quadratum A B ad quadratum C D, nempe eam quam quadratum A B ad quadratum C G, sumta C G minore quam C D & à C D auferatur pars D H, minor quam D G excessus C D supra C G, atque ita ut reliqua H C commensurabilis sit ipsi A B, hoc enim fieri posse constat. Erit ergo C H major quam C G. Atqui ut quadratum temporis A B ad quadratum temporis C H, ita spatium E, quod tempore A B peractum est ad spatium peractum tempore C H, per superius ostensa. Hoc vero spatio majus est illud quod tempore C D percurritur, nempe spatium F. ergo spatii E ad spatium F minor est ratio quam quadrati A B ad quadratum C H. Sicut autem spatium E ad F, ita ponebatur esse quadratum A B ad quadratum C G, ergo minor quoque erit ra-

De descensu gravium

tio quadrati A B ad quadratum C G, quam quadrati A B ad quadratum C H, ac proinde quadratum C G majus quadratum C H; quod est absurdum, quum C H major dicta sit quam C G. Non habet igitur spatium E ad F majorem rationem quam quadratum A B ad quadratum C D.

Habeat jam, si potest, minorem, sitque ratio spatii E ad F eadem quæ quadrati A B ad quadratum C I, sumptâ C I majore quam C D, & a C I auferatur L K minor excessu I D, quo C D superatur à C I, atque ita ut reliqua K C sit commensurabilis A B. Quia ergo ut quadratum temporis A B ad quadratum temporis C K, ita est spatium E, peractum tempore A B, ad spatium peractum tempore C K. Hoc vero spatio minus est spatium peractum tempore C D, nempe spatium F. erit proinde spatii E ad F major ratio quam quadrati A B ad quadratum C K. Sicut autem spatium E ad F, ita ponebatur esse quadratum A B ad quadratum C I. Ergo major erit ratio quadrati A B ad quadratum C I, quam ejusdem quadrati A B ad quadratum C K, ideoque quadratum C I minus erit quam quadratum C K, quod est absurdum, quum C I major sit quam C K. Ergo neque minorem rationem habet spatium E ad F quam quadratum A B ad quadratum C D. quare necesse est ut eandem habeat. Porro cum celeritates in fine temporum A B, C D acquisitæ sint inter se sicut ipsamet tempora, apparet rationem spatiorum E ad F eandem quoque esse quæ quadratorum temporum A B, C D, quibus transmissa sunt. Itaque constat propositum.

PROPOSITIO IV.

Si grave celeritate ea quam in fine descensus acquisivit sursum tendere cœperit, fiet ut paribus temporis partibus, spatia quæ prius sursum, eadem deorsum transeat, adeoque ad eandem unde descenderat altitudinem ascendat. Item ut æqualibus temporis partibus æqualia amittat celeritatis momenta.

Sunto enim ut in propositione 2, spatia quotlibet, æqualibus

temporis partibus cadendo e quiete peracta, quorum primum A B, secundum compositum ex B D, quod celeritate æquabili acquisita per A B transeundum erat, & ex D E ipsi A B æquali, tertium compositum, ex E F, duplo ipsius B D, & ex F G, eidem A B æquali, quartum compositum ex G H, triplo ipsius B D, & ex H K ipsi itidem A B æquali, atque eadem ratione porro crescentia, si plura fuerint. Dico totidem æquabilibus temporibus eadem spatia K G, G E, E B, B A, singula singulis peragenda esse a gravi sursum tendente, atque incipiente cum celeritate in fine descensus K acquisita.

Brevitatis autem gratia celeritas quæque designetur deinceps longitudine spatii quod grave motu æquabili, cum celeritate illa, atque temporis parte una, quales in descensu consideravimus, transmissurum esset.

Itaque ex ostensis dicta propositione, cum in K grave perveneri, habet celeritatem G H auctam celeritate B D, hoc est celeritatem K F, quia K F æquatur ipsis H G, B D, sunt enim partes singulæ H K, F G, æquales ipsi A B, ac proinde utraque simul ipsi B D, quam esse duplam A B ostendimus propositione 2. Itaque celeritatem in fine descensus K acquisitam sursum convertendo, si grave æquabili motu ferretur, conficeret una temporis parte spatium K F. Atqui, gravitatis actione accedente, diminuetur ascensus K F spatio F G ipsi A B æquali, ut patet ex dictis ad hypothesin initio sumptam. Ergo parte prima temporis ascendet grave tantum per K G, quo eodem spatio parte temporis novissima descenderat. Simul vero & celeritati tantum decessisse necesse est, quantum acquiritur temporis parte una deorsum cadendo, hoc est celeritatem B D. Itaque grave, ubi ad G ascenderit, habet celeritatem reliquam H G, cum initio ascensus habuerit celeritatem H G una cum celeritate B D. Est autem ipsi H G æqualis G D, quæ simul æquetur ipsi F E una cum D B, hoc est una cum dupla A B, hoc est una cum duabus F G & B D. Ergo si ex G, cum celeritate æquabili, quantam illic habet, sursum pergeret, conficeret una parte temporis spatium G D. Accedente autem gravitatis actione, diminuetur ascensus iste spatio D E, ipsi A B æquali. Ergo, hac secunda parte temporis, ascendet per spatium G E, quod simili temporis parte etiam cadendo transierat. Simul autem celeritati tantum decessisse denuo decet quantum temporis parte una ex casu acquiritur, nempe celeritas B D. Itaque ubique ad

De descensu gravium

E ascenderit, habet duntaxat celeritatem F E, quæ nimirum relinquitur quum à celeritate G D auferitur celeritas B D. Nam B D, ut jam diximus, æqualis est duabus D E, F G.

Est autem ipsi F E æqualis E A, quum F E æquetur ipsi B D bis sumptæ, hoc est ipsi B D una cum dupla A B, hoc est una cum duabus A B, D E. Ergo si ex E cum celeritate æquabili, quantam illic habet, sursum pergeret, confectarum esset una temporis parte spatium E A. Sed accedente actione gravitatis, diminuetur ascensus iste ipso spatio A B. Proinde hac parte temporis per spatium E B tantum ascendet, quod simili parte temporis descendendo quoque transierat. Hic vero rursus celeritati tantum decessisse necesse est quantum una temporis parte cadendo deorsum acquirit, hoc est celeritatem B D. Itaque grave, ubi usque ad B ascenderit, habet celeritatem ipsam B D reliquam, cum in E habuerit celeritatem F E ipsius B D duplam. Si ergo ex B cum celeritate æquabili, quantam illic habet, sursum pergeret, confecturum esset parte una temporis spatium æquale ipsi D B, hoc est duplum A B. Sed accedente gravitatis actione, diminuitur ascensus iste spatio quod ipsi A B æquale sit. Igitur hac parte temporis ascendet tantummodo per spatium B A, quod etiam primo descensus tempore transierat. Atque in fine quidem extremi temporis hujus necessario grave in A puncto reperietur. Sed dicetur forsan altius ascendisse quam ad A, atque inde eo relapsum esse. At hoc absurdum esset, cum non possit, mota à gravitate profecto, altius quam unde decidit ascendere. Porro quum celeritati quam in B habebat rursus decesserit celeritas B D, patet jam gravi in A constituto nullam celeritatem superesse, ac proinde non altius excursurum. Itaque ostensum est ad eandem unde decidit altitudinem pervenisse, & singula spatia, quæ æqualibus descensus temporibus transmiserat, eadem totidem ascensus temporibus remensum esse. Sed & æqualibus temporibus æqualia ipsi decessisse celeritatis momenta apparuit. Ergo constat propositum.

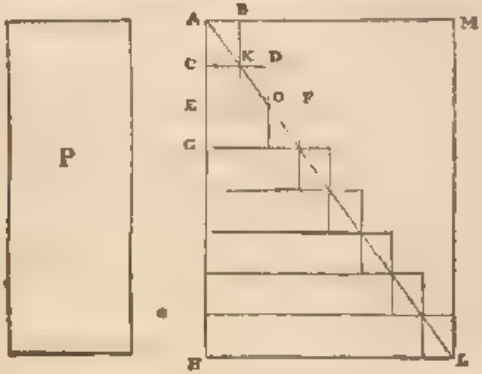
Quia vero in demonstratione propositionis secundæ, ex qua pendet præcedens, adsumptum fuit certam quandam esse proportionem spatiorum quæ continuis æqualibus temporibus à grave cadente transeuntur, quæque eadem sit, quæcunque æqualia tempora accipiantur, quod quidem & ex rei natura ita se habere necesse est, & si negetur, fatendum frustra proportionem istorum spatiorum investigari. Tamen, quia propositum etiam absque hoc demonstrari potest, Galilei methodum sequendo,

operæ pretium erit demonstrationem, ab illo minus perfecte traditam, hic accuratius conscribere. itaque rursum hic demonstrabimus, De descensu gravium.

PROPOSITIO V.

Spatium peractum certo tempore, à gravi è quiete casum inchoante, dimidium esse ejus spatii quod pari tempore transiret motu æquabili, cum celeritate quam acquisivit ultimo casus momento.

Sit tempus descensus totius A H, quo tempore mobile peregerit spatium quoddam cujus quantitas designetur plano P. ducta-



que H L perpendiculari ad A H, longitudinis cujuslibet, referat illa celeritatem in fine casus acquisitam. Deinde completo rectangulo A H L M, intelligatur eo notari quantitas spatii quod percurreretur tempore A H, cum celeritate H L. Ostendendum est igitur planum P dimidium esse rectanguli M H, hoc est, ducta diagonali A L, æquale triangulo A H L.

Si planum P non est æquale triangulo A H L, ergo aut minus eo erit, aut majus. Sit primo, si fieri potest, planum P minus triangulo A H L. dividatur autem A H in tot partes æquales A C, C E, E G &c. ut, circumscriptâ triangulo A H L figurâ e rectangulis quorum altitudo singulis divisionum ipsius A H partibus æquetur, ut sunt rectangula B C, D E, F G, alterâque eidem triangulo inscriptâ, ex rectangulis ejusdem altitudinis, ut sunt K E, O G &c. ut, inquam, excessus illius figuræ supra hanc, minor sit excessu

De motu gravium

trianguli A H L supra planum P hoc enim heri posse perspicuum est, cum totus excessus figuræ circumscriptæ super inscriptam æquetur rectangulo infimo, basin habenti H L erit itaque omnino excessus ipsius trianguli A H L supra figuram inscriptam minor quam supra planum P, ac proinde figura triangulo inscripta major plano P. Porro autem, quum recta A H tempus totius descensus referat, ejus partes æquales A C, C E, E G, æquales temporis illius partes referent. Cumque celeritates mobilis cadentis crescant eadem proportione qua tempora descensus *, sitque celeritas in fine totius temporis acquisita H I, erit ea, qua in fine primæ partis temporis A C acquiretur, C K, quia ut A H ad A C, ita H L ad C K. Similiter quæ in fine partis temporis secundæ C E acquiritur, erit E O, atque ita deinceps. Patet autem, tempore primo A C, spatium aliquod à mobili transmissum esse, quod majus sit nihilo, tempore vero secundo C E transmissum esse spatium quod majus sit quam K E, quia spatium K E transmissum fuisset tempore C E, motu æquabili, cum celeritate C K habent enim spatia, motu æquabili transacta, rationem compositam ex ratione temporum, & ratione velocitatum, ideoque cum tempore A H, celeritate æquabili H L percurrit posuerimus spatium M H, sequitur tempore C E, cum celeritate C K, percurri spatium K E, quum ratio rectanguli M H ad rectangulum K E componatur ex rationibus A H ad C E, & H L ad E O.

* Prop. 2. hujus.

Quum ergo, ut dixi, spatium K E sit illud quod transmitteretur tempore C E, cum celeritate æquabili C K, mobile autem feratur tempore C E motu accelerato, qui jam principio hujus temporis habet celeritatem C K, manifestum est isto accelerato motu, tempore C E, majus spatium quam K E confecturum. Eadem ratione, tempore tertio E G, majus spatium conficiet quam O G, quia nempe hoc confecturum esset tempore eodem E G, cum celeritate æquabili E O. Atque ita deinceps, singulis temporis A H partibus, à mobili majora spatia quam sunt rectangula figuræ inscriptæ, ipsis partibus adjacentia, peragentur. Quare totum spatium motu accelerato peractum majus erit ipsa figura inscripta. Spatium vero illud æquale positum fuit plano P. Itaque figura inscripta minor erit spatio P, quod est absurdum, eodem enim spatio major ostensa fuit. Non est igitur planum P minus triangulo A H L. At neque majus esse ostendetur.

Sit enim, si potest, & dividatur A H in partes æquales, atque ad earum altitudinem, inscripta circumscriptaque rursus,

sit ante, sit triangulo A H I figura ex rectangulis, ita ut altera alteram excedat minori excessu quam quo planum P superat triangulum A H L, erit igitur necessario figura circumscripta minor plano P. Constat jam, prima temporis parte A C, minus spatium a mobili transmitti quam sit B C, quia hoc percurreretur eodem tempore A C cum celeritate æquabili C K, quam demum in fine temporis A C mobile adeptum est. Similiter secunda parte temporis C B, minus spatium motu accelerato transmitteretur quam sit D E, quia hoc percurreretur eodem tempore C E, cum celeritate æquabili E O, quam demum in fine temporis C E mobile assequitur. Atque ita deinceps, singulis partibus temporis A H, minora spatia a mobili trajicientur quam sunt rectangula figuræ circumscriptæ, ipsis partibus adjacentia. Quare totum spatium motu accelerato peractum, minus erit ipsa figura circumscripta. Spatium vero illud æquale positum fuit plano P, ergo planum P minus quoque erit figura circumscripta, quod est absurdum, cum figura hæc plano P minor ostensa fuerit. Ergo planum P non majus est triangulo A H I, sed nec minus esse jam ostensum fuit. Ergo æquale sit necesse est, quod erat demonstrandum.

De descensu gravium.

Et hæc quidem omnia quæ hactenus demonstrata sunt, gravibus per plana inclinata descendentibus atque ascendentibus æque ac perpendiculariter motis convenire sciendum est: cum, quæ de effectu gravitatis posita fuerunt, eadem ratione utrobique sint admittenda.

Hinc vero non difficile jam erit demonstrare propositionem sequentem quam concedi sibi, ut quodammodo per se manifestam, Galileus postulavit. nam demonstratio illa quam postea adferre conatus est, quæque in posteriori operum ejus editione extat, parum firma meo quidem judicio videtur. Est autem propositio hujusmodi.

PROPOSITIO VI.

Celeritates gravium, super diversis planorum inclinationibus descendendo acquisitæ, æquales sunt, si planorum elevationes fuerint æquales.

Elevationem plani vocamus altitudinem ejus secundum perpendiculum.

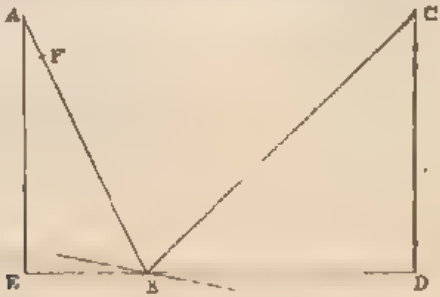
Sunto itaque plana inclinata, quorum sectiones factæ plano ad horizontem erecto, A B, C B; quorumque elevationes A E, C D

De descensu gravium

sint æquales; & cadat grave ex A per planum A B, & rursus ex C per planum C B. dico utroque casu eundem gradum velocitatis in puncto B acquisiturum.

Si enim per C B cadens minorem velocitatem acquirere dicatur quam cadens per A B, habeat ergo, per C B cadens, eam duntaxat quam per F B acquireret, posita nimirum F B minore quam A B. Acquiret autem per C B cadens eam velocitatem qua rursus per totam B C posset ascendere.* Ergo & per F B acquiret eam

* Prop. 4. hujus



velocitatem qua posset ascendere per totam B C. Ideoque cadens ex F in B, si continuat, porro motum per B C, quod repercussu ad superficiem obliquam fieri potest, ascendet usque in C, hoc est, altius quam unde decidit, quod est absurdum.

Eodem modo ostendetur neque per planum A B decidenti minorem velocitatem acquiri quam per C B. Ergo per utraque plana eadem velocitas acquiritur, quod erat demonstrandum.

Quod si vero, pro plano alterutro, sumatur perpendiculum ipsum planorum elevationi æquale, per quod decidere mobile ponatur, sic quoque eandem quam per plana inclinata velocitatem eiacquiri constat, eadem namque est demonstratio.

Porro hinc jam recte quoque procedet demonstratio alterius theorematis Galileani, cuiusque omnia, quæ de descensu super planis inclinatis tradidit, superstruuntur. Nempe

PROPOSITIO VII.

Tempora descensuum super planis diversimode inclinatis, sed quorum eadem est elevatio, esse inter se ut planorum longitudines.

Sint plana inclinata A C, A D quorum eadem elevatio A B dico tempus

tempus descensus per planum A C ad tempus descensus per A D esse ut longitudo A C ad A D. Est enim tempus per A C æquale tempori motus æquabilis per eandem A C, cum celeritate dimidia ejus quæ acquiritur casu per A C*. Similiter tempus per A D est æquale tempori motus æquabilis per ipsam A D, cum dimidia celeritate ejus quæ acquiritur casu per A D. Est autem hæc dimidia celeritas illi dimidiæ celeritati æqualis *, ideoque dictum tempus motus æquabilis per A C, ad tempus motus æquabilis per A D, erit ut A C ad A D. Ergo & tempora singulis illis æqualia, nimirum tempus descensus per A C, ad tempus descensus per A D, eandem rationem habebunt, nempe quam A C ad A D. quod erat demonstrandum.

De descensu gravium.

* Prop. hujus.

* Prop. praeced.

Eodem modo ostendetur & tempus descensus per A C, ad tempus casus per A B perpendicularem, esse ut A C ad A B longitudine.

PROPOSITIO VIII.

Si ex altitudine eadem descendat mobile continuato motu per quotlibet ac qualibet plana contigua, utcunque inclinata; semper eandem in fine velocitatem acquiret, quæ nimirum æqualis erit ei quam acquireret cadendo perpendiculariter ex pari altitudine.

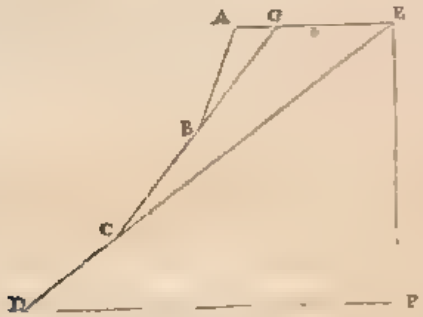
Sint plana contigua A B, B C, C D, quorum terminus A, supra horizontalem lineam D F per infimam terminum D ductam, altitudinem habeat quanta est perpendicularis B F descendatque mobile per plana illa ab A usque in D. Dico in D eam velocitatem habiturum quam, ex B cadens, haberet in F.

Producta enim C B occurrat rectæ A E in G. Itemque D C producta

De descensu gravium.

occurrat eidem A E in E. Quoniam itaque per A B descendens eandem acquirit velocitatem in termino B, atque descendens per G B*; manifestum est, cum flexus ad B nihil obstare motui ponatur, tantam velocitatem habiturum ubi in C pervenerit, quantam si per G C planum descendisset, hoc est, quantam ha-

*Prop. 6 hu.



beret ex descensu per B C. Quare & reliquum planum C D eodem modo transibit ac si per B C advenisset, ac proinde in D denique parem velocitatem habebit, ac si descendisset per planum B D, hoc est, eandem quam ex casu perpendiculari per B E. quod erat demonstrandum.

Hinc liquet etiam per circuli circumferentiam, vel per curvam quamlibet lineam descendente mobili (nam curvas tanquam ex infinitis rectis compositæ esse hic considerare licet) semper eandem illi velocitatem acquiri si ab æquali altitudine descenderit: tantamque eam esse velocitatem, quantam casu perpendiculari ex eadem altitudine adipisceretur.

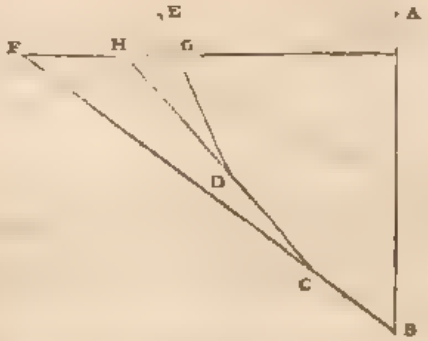
PROPOSITIO IX.

SI grave, à descensu, sursum convertat motum suum, ascendet ad eandem unde venit altitudinem, per quascunque planas superficies contiguas, & quomodocunque inclinatas, incesserit.

Cadat grave ex altitudine A B, & ex puncto B inclinata sint sursum plana B C, C D, D E, quorum extremitas E sit eadem altitudine cum puncto A. Dico si mobile, post casum per A B, convertat motum ut pergat moveri per dicta plana inclinata, perventurum usque in E.

Dicatur enim, si fieri potest, tantum ad C perventurum. Producantur B C & C D, donec occurrant horizontali G F in E & H. Cum igitur mobile, superatis planis B C, C D, habeat tantum eam velocitatem quâ possit ascendere per D G, vel per D H, nam ad hæc utraque eadem velocitate opus esse constat ex propositione

De descensu Aqua quæ



6, Ergo, superato plano B C, eam duntaxat habebat qua potuisset ascendere per C H, vel per C F. Ergo in B duntaxat eam qua potuisset ascendere per B F, hoc est, eandem quam acquirerat descendendo per F B. Atqui in B habet velocitatem qua potest ascendere usque in A. Ergo illa velocitate quam acquirit grave descendendo per F B, posset ascendere per B A, hoc est, altius quam unde discesserat, quod fieri non potest.

Est autem eadem prorsus demonstratio quotcunque plana fuerint per quæ mobile ascendat. Vnde & si infinita fuerit planorum multitudo, hoc est, si superficies aliqua curva ponatur, per hanc quoque ad eam ex qua venit altitudinem mobile assurget.

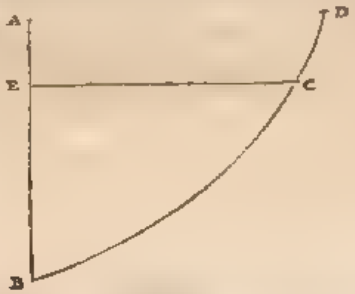
PROPOSITIO X.

Si mobile cadat perpendiculariter, vel per quamlibet superficiem descendat, ac rursus impetu concepto per quamlibet aliam feratur sursum, habebit ascendendo ac descendendo in punctis æquè altis eandem semper velocitatem.

Vt si mobile ex altitudine A B decidens, motum deinde continuet per superficiem B C D, in qua punctum C sit pari altitudine atque in A B est punctum E. Dico in C eandem velocitatem inesse mobili atque in E fuerat.

De descensu gravium

Quum enim in C ea velocitas superſit mobili qua porro aſcendat



usque ad D punctum, æque altum ac A *: eumque & ex deſcenſu per A B velocitatem eam æquirat qua, converſo motu, aſcenſurum ſit per C D *, Patet cum pervenit ad C aſcendendo, eandem ipſum habere velocitatem, quam habebat in B deſcendendo; quod erat demonſtrandum.

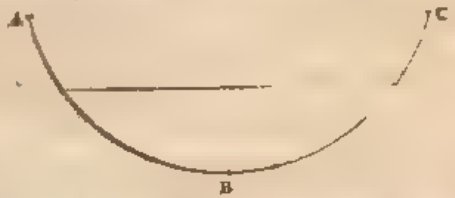
* Prop. praeced.

*Prop. praeced.

PROPOSITIO XI.

SI mobile per ſuperficiem aliquam deorſum tendat, ac deinde converſo motu ſurſum per eandem ſuperficiem vel aliam ſimilem ſimiliterque poſitam feratur, æqualibus temporibus per idem ſpatium deſcendet atque aſcendet.

Velut ſi per ſuperficiem A B deſcendat mobile, atque, ubi ad B



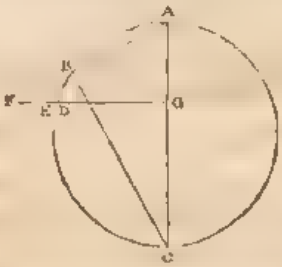
pervenerit, converſo motu ſurſum per eandem A B, vel ei ſimilem & reſpectu plani horizontalis ſimiliter poſitam B C, aſcendat, conſtat ex ante demonſtratis, perventurum ad eandem ex qua venit altitudinem Cum autem perpetuo, in punctis quorum eadem altitudo, eandem velocitatem habeat aſcendendo ac deſcendendo*, apparet eandem lineam bis eadem velocitate ſingulis ſui partibus percurri. unde & tempora utriuſque motus æqualia eſſe neceſſe eſt, quod erat demonſtrandum.

* Prop. praeced.

PROPOSITIO XII.

Esto circulus A B C, *diametro* A C, *cui ad angulos rectos sit* F G, *huic vero occurrat à termino diametri* A *educta* A F *extra circulum, quæ quidem necessario secabit circumferentiam, puta in* B. *Dico arcum* B D, *lineæ* G F, A F *interceptum, minorem esse recta* D F.

Iungatur enim B C, & ducatur ex B puncto tangens circumfe-



rentiam recta B E, quæ necessario occurret rectæ F G inter F & D. Est igitur angulus B A C in circulo æqualis angulo E B C* quare & angulus F B E, qui una cum E B C constituit angulum rectum F B C, erit æqualis B C A. Quia autem similia sunt triangula A B C, A G F, erit & angulus F æqualis angulo A C B Ergo idem angulus F æqualis angulo F B E. Itaque isosceles est triangulus F E B, habens crura æqualia F E, E B. Addita ergo utrique eorum recta E D, fiet F D, æqualis duabus B E, E D. Hæc vero duas majores esse constat arcu B D, iisdem terminis intercepto, & in eandem partem cavo Ergo & F D eodem arcu B D major erit: quare constat propositum.

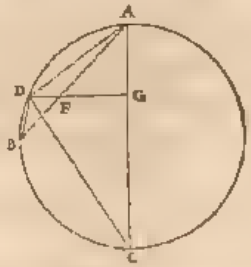
PROPOSITIO XIII.

Iisdem positis, si recta A B *occurrat ipsi* D G *intra circulum; Dico arcum* B D, *rectis* G D, A B *interceptum, majorem esse recta* D F.

Iungatur enim D C & ducatur arcui D B subtensa D B. Quoniam ergo angulus A B D æqualis A C D, hoc est, angulo A D C, angulus autem D F B major angulo A D F, sive A D C, erit

De descensu gravium.

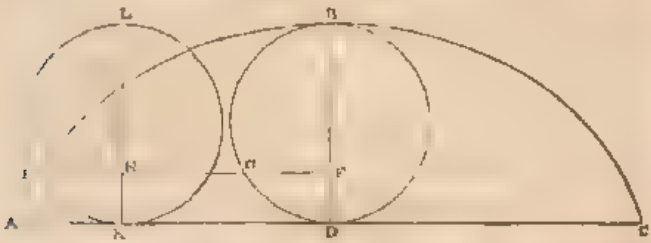
idem D F B etiam major D B F. Ergo in triangulo D F B latus D B



majus latere D F, unde multo magis arcus D B superabit eandem D F. Quare constat propositum.

PROPOSITIO XIV.

Sit cyclois A B C *cujus basis* A C *axis* B D. *Quomodo autem generetur ex definitione & descriptione mechanica superius traditis satis manifestum arbitror. Et circa axem* B D, *circulus descriptus sit* B G D, *& a quolibet puncto* E *in cycloide sumpto agatur* E F *basi* A C *parallela, quæ occurrat axi* B D *in* F, *secetque circumferentiam* B G D *in* G, *Dico rectam* G E *arcui* G B *æqualem esse.*



Describatur enim per B punctum circulus L B K ipsi B G D æqualis, quique tangat basin cycloidis in K, & ducatur diameter K L. Est igitur recta A K arcui B K æqualis, sed tota A D æqualis semicircumferentiæ K B L, ergo K D æqualis arcui B L sive G B. Est autem K D sive N F æqualis E G, quoniam E N æqualis G F, & communis utrique N G. Ergo constat & G E æqualem esse arcui G B

PROPOSITIO XV.

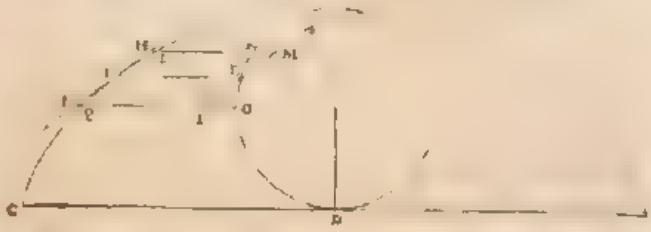
De Dissertatione Gravesandi.

Dato in Cycloide puncto, rectam per illud ducere quæ Cycloidem tangat.

Sit cyclois A B C, & punctum in ea datum B, per quod tangentem ducere oporteat.

Circa axem cycloidis A D describatur circulus genitor A E D, & ducatur B E parallela basi cycloidis, quæ dicto circulo occurrat in E, & jungatur A E, cui denique parallela per B agatur H B N. Dico hanc cycloidem in B contingere.

Sumatur enim in ea punctum quodlibet, à B diversum, ac pri-

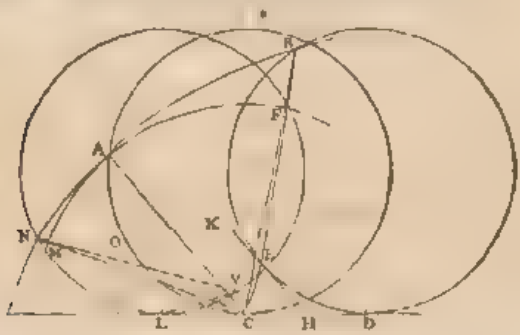


mo versus superiora vehat H, & per H ducatur recta basi cycloidis parallela, quæ occurrat cycloidi N I, circulo A E D in K, rectæ A E in M. Quia ergo K I est æqualis arcui K A, recta autem K M minor arcu K E, erit recta M L minor arcu A E, hoc est, recta E B, sive M H. Unde apparet punctum N H esse extra cycloidem.

Deinde in recta H N sumatur punctum N inferius B, & per N agatur, ut ante, basi parallela, quæ occurrat cycloidi in Q, circulo A E D in O, rectæ A E productæ in P. Quia ergo O Q, æqualis est arcui O A, O P autem major arcu O E, erit P Q minor arcu E A, hoc est, rectæ E B, sive P N. Unde apparet rursus punctum N esse extra cycloidem. Cum igitur quodlibet punctum præter B, in recta H B N sumptum, sit extra cycloidem, constat illam in puncto B cycloidem contingere, quod erat demonstrandum.

Huic demonstrationi an locum suum hic relinquerem dubitavi, quod non multum ei absimilem à clarissimo VVrennio editam inveniam in libro VVallisii de Cycloide. Potest autem & universali constructione propositum absolvi, quæ non cycloidi tantum sed & aliis curvis, ex cujuslibet figuræ circumvolutione genitis, conveniat, dummodo sit figura in eandem partem cava, & ex iis quæ geometricæ vocantur.

DE DESCRIPTIONE. Sit enim curva N A B, orta ex circumvolutione figuræ O L super regula L D; describente nempe puncto N, in circumferentia figuræ O L sumpto. Et oporteat ad punctum curvæ A tangente ducere. Ducatur recta C A à puncto C, ubi figura regulam tangebat cum punctum describens esset in A: quod punctum contactus semper invenire potest, siquidem eo reducitur problema ut duæ rectæ inter se parallelæ ducendæ sint, quarum altera transeat per punctum describens in figuræ ambitudatum, altera figuram tangat, quæque inter se distent quantum distat punctum datum A ab regula L D dico ipsam C A occurrere curvæ ad angulos rectos, sive circumferentiam M A F descriptam centro C radio C A, tangere curvam in puncto A, unde perpendicularis ad A C per punctum A ducta curvam ibidem continget.



Ducatur enim C B primum ad punctum curvæ B, quod distet ultra punctum A ab regula L D, intelligaturque figuræ positus in B E D, cum punctum describens esset in B, contactus regulæ in D. & punctum curvæ quod erat in C, cum punctum describens esset in A, hic jam sublatum sit in E, & jungantur E C, E B, tangatque figuram in E recta K H, occurrens regulæ in H.

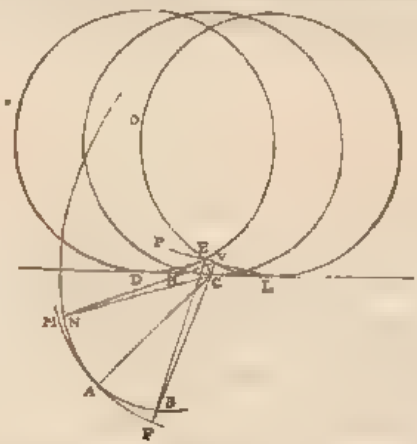
Quia ergo recta C D æqualis est curvæ E D, eadem vero curva major est utraque simul E H, H D; erit E H major quam C H. Vnde angulus E C H major quam C E H, & proinde E C L minor quam C E K. Atqui addendo angulum K E B, qui æqualis est L C A, ad K E C, fit angulus C E L & auferendo ab E C L angulum L C B, fit E C B. Ergo angulus C E B major omnino angulo E C B. Itaque in triangulo C E B, latus C B majus erit quam E B. sed E B æquale patet esse C A, cum sit idemmet ipsum una cum figura transpositum.

tum. Ergo C B etiam major quam C A, hoc est, quam C F. unde constat punctum B esse extra circumferentiam M A F. De descensu curvarum

Sit rursus punctum N in curva sumptum inter regulam I D & punctum A. Cumque punctum describens esset in N, ponatur situs figuræ fuisse in V I, punctumque contactus L, punctum vero quod tangebat prius regulam in C, sit jam sublatum in V: & jungantur C N, N V, V C, V L. Erit ergo V N æqualis C A, imo erit ipsa C A translata in V N. Iam quia recta L C æquatur curvæ I V, ac proinde major est recta I V, erit in triangulo C I V angulus L V C major quam I C V. Quare addito insuper angulo I V N ad I V C, fiet totus N V C major utique quam I C V, ac proinde omnino major angulo N C V, qui pars est I C V. Ergo in triangulo C V N latus C N majus erit latere V N, cui æquatur C A, ideoque C N major quoque quam C A, hoc est quam C M. Vnde apparet punctum N cadere extra circulum M A F, qui proinde tanget curvam in puncto A. quod erat demonstrandum.

Est autem eadem quoque tum constructio tum demonstratio, si curva genita sit à puncto describente, vel intra vel extra ambitum figuræ circumvolutæ sumpto. Nisi quod, hoc posteriori casu, pars quædam curvæ infra regulam descendit, unde nonnulla in demonstratione oritur diversitas.

Sit enim punctum A, per quod tangens ducenda est, datum in



parte curvæ N A B, quæ infra regulam C I descendit, descripta numerum à puncto N extra figuram revolutam sumpto, sed certam

De descensu gravium

positionem in eodem ipsius plano habente. Invento igitur puncto C, ubi figura revoluta tangit regulam C D quum punctum describens esset in A, ducatur recta C A. Dico hanc curvæ N A B occurrere ad rectos angulos, sive circumferentiam radio C A centro C descriptam tangere curvam N A B in puncto A. Ostendetur autem extrinsecus ipsam contingere, cum in curvæ parte supra regulam C D posita interius contingat.

Positis enim & descriptis iisdem omnibus quæ prius, ostenditur rursus angulus E C H major quam C E H atqui ad E C H addito H C B fit angulus E C B, & a C E H auferendo H E B, qui æqualis est D C A, fit angulus C E B. Ergo E C B major omnino quam C E B. unde in triangulo E C B latus E B majus quam C B sed ipsi E B æqualis est C A, sive C F. Ergo & C F major quam C B: ideoque punctum circumferentiæ F est ultra curvam N A B a centro remotum.

Item rursus ostenditur angulus L V C major I C V. Quare C V F, qui cum L V C duos rectos æquat, minor erit quam V C D. Atqui addendo ad V C D angulum D C N, fit V C N, & auferendo ab C V F angulum F V N, fit C V N. Ergo angulus V C N omnino major quam C V N. In triangulo itaque C V N, latus V N majus erit quam C N. Sit autem ipsi V N æqualis C A sive C M. Ergo & C M major quam C N, ideoque punctum circumferentiæ M erit ultra curvam N A B a centro C remotum. Itaque circulus circumferentiam M A F tangere curvam in puncto A. quod erat demonstrandum.

Quod si punctum curvæ per quod tangens ducenda est, sit illud ipsum ubi regula curvam secat, erit tangens quæsita semper regulæ perpendicularis, ut facile esset ostendere.

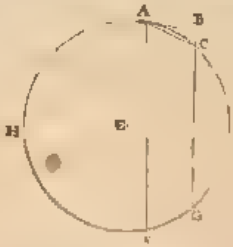
PROPOSITIO XVI.

Aliter Lemma

Si circuli circumferentiam, cujus centrum F, secent rectæ duæ parallelæ A F, B G, quarum utraque ad eandem partem centri transeat, vel altera A F per centrum ipsum: & à puncto A, quo centro propior circumferentiam secat, ducatur recta ipsam contingens. dico partem hujus A H, à parallela utraque interceptam, minorem esse arcu A C, ab utraque eadem parallela intercepto.

Ducatur enim arcui A C subtensa recta A C. Quia ergo angulus B A F est æqualis ei quem capit portio circuli A H F, quæ vel major est semicirculo vel semicirculus, erit proinde angulus B A F,

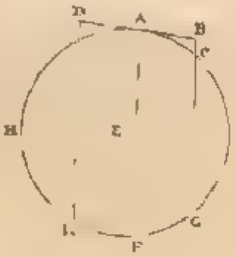
vel minor recto vel rectus, ideoque angulus A B C vel major recto vel rectus. Quare in triangulo A B C latus A C, angulo B subtensum, majus erit latere A B. sed idem latus A C minus est arcu A C. Ergo omnino & A B arcu A C minor erit.



PROPOSITIO XVII.

Iisdem positis, si tertia recta prioribus parallela D K, *circulum secuerit, quæ ab ea quæ centro propior est* A F, *tantundem distet quantum hæc à reliqua* B G: *dico partem tangentis in* A, *a parallela ultimo adjecta, & media interceptam, nempe* A D, *arcu* A C *a primis duabus parallelis intercepto minorem esse.*

Hoc enim patet quum A D ipsi A B æqualis sit, quam antea ostendimus arcu A C minorem esse.



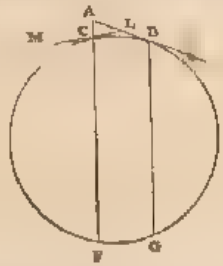
PROPOSITIO XVIII.

Si circulum, cujus centrum E, *duæ rectæ parallelæ secuerint* A F, B G; *& à puncto* B, *ubi quæ a centro remotior est, vel tantundem atque altera distat, circumferentia oc-*

De motu Cycloidis

currit, ducatur recta circumferentiam tangens. erit pars hujus B A, *à parallelis intercepta, major arcu ab iisdem parallelis intercepto* B C.

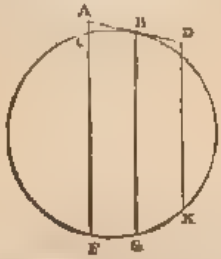
Ducatur enim in puncto C, recta M C L circumferentiam tangens, quæ occurrat tangenti B A in L. In triangulo rectilineo A C L,



angulus C æqualis est angulo M C F, hoc est, ei quem capit portio circuli C B F. Angulus autem A æquatur angulo quem capit portio circuli B C G, quæ portio quum sit major vel æqualis portioni C B F, quippe quum B G vel alterius distet à centro quam C F, vel tantundem: erit proinde trianguli A C L angulus A minor vel æqualis angulo C: & consequenter latus C L vel minus vel æquale lateri A L. Atqui C L una cum L B majores sunt arcu C B. Ergo & A L. una cum L B, hoc est, tangens A B, eodem arcu C B major erit. quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XIX.

Iisdem positis, si tertia recta prioribus parallela D K *circulum secet, quæ tantundem distet ab ea quæ remotior est à*



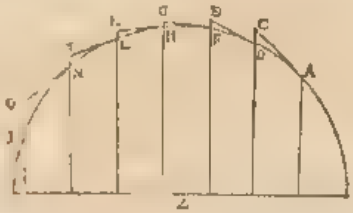
centro quantum hæc à reliqua A I. *Erit pars tangentis in* B,

a parallela media, & ultimo addita D K, *intercepta, minimum* B D, *major arcu* B C.

Hoc enim manifestum est cum B D fiat ipsi B A æqualis, quam ostendimus arcu B C majorem esse.

PROPOSITIO XX.

Si arcus circuli, semicircumferentia minor, A B, *in partes quotlibet secetur lineis rectis parallelis, quæ & inter se, & cum rectis sibi parallelis per terminos arcus ductis, æqualia intervalla constituant, quales sunt* C D, E F, G H, K L *&c. ducanturque ad terminum arcus alterutrum* A, *& ad reliqua omnia sectionum puncta rectæ circumferentiam tangentes, omnes in eandem partem, & ut unaquaque occurrat proximæ dictarum parallelarum, cujusmodi sunt tangentes* A C, D E, F G, H K *&c. Dico has tangentes, dempta prima* A C, *simul sumptas, minores esse arcu proposito* A B. *Easdem vero omnes, non omissa* A C, *majores esse arcu* A B *diminuto parte extrema* N B, *hoc est, majores arcu* A N.



Ponamus enim primo parallelarum aliquas transire ab utraque parte centri Z, & sit G H, earum quæ sunt à parte B, centro proxima, vel per ipsum centrum transeat. Itaque tangentes omnes inter G H & B O comprehensæ, ut H K, E M, N O, singulæ suis arcubus minores sunt * Porro autem & tangens G F, arcu sequente F B minor est *, & similiter tangens B D arcu D A. Itaque tangentes omnes inter B O & C D interjectæ, minores sunt arcubus B H & F A, ac proinde omnino minores arcubus B H, H A, sive arcu B A, quod erat primo ostendendum.

* Prop. 8 hujus.

* Prop. 17 hujus.

Porro jam demonstrabimus tangentes omnes inter B O & A majores esse arcu A N. Enimvero parallela G H, vel propius centrum Z transit quam parallela E F, quam pono proximam esse

De motu in Cycloide.

carum quæ à parte A transeunt, vel erit remotior, vel æque distabit.

Quod si E F longius à centro vel æque remota est ac G H, erit tangens F G major arcu suo F H, & reliquæ tangentes versus A, nimirum E D, C A majores singulæ arcubus suis *, adeo ut omnes simul G F, E D, C A majores sint arcu H A. sed & arcu H L major erit tangens L M *, & arcu I N tangens N O, itaque tangentes omnes, præter H K, majores simul erunt arcu A N, multoque magis, accedente ipsa H K, tangentes omnes inter A & B comprehensæ arcu eodem A N majores erunt.

Prop. 19. hujus.

* Prop. 19. hujus.

Si vero G H à centro longius distat quam E F, erit tangens K H major arcu H F *, & tangens M I ut ante major arcu I H, & tangens O N major arcu I N I, & omnes proinde tangentes O N, M I, K H majores arcu N F. Sed & tangens E D major est arcu suo F D *, & tangens C A major similiter arcu suo D A. Itaque tangentes omnes inter B O & A, præter G F, majores erunt arcu N A; multoque magis tangentes eædem, accedente G F, hoc est, omnes quæ inter B O & A interjiciuntur, eodem arcu N A majores erunt.

* Prop. 19. hujus.

* Prop. 18. hujus.

Ex his vero etiam demonstratio manifesta est in casibus aliis, qualiscunque semicircumferentiæ arcus accipiatur, quippe cum vel eadem sit ubique, vel pars tantum præcedentis demonstrationis.

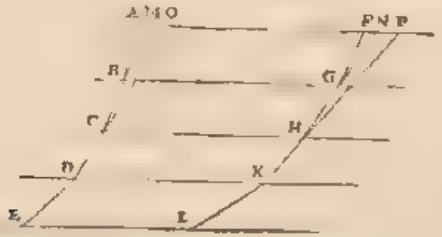
PROPOSITIO XXI.

Si mobile descendat continuato motu per quælibet plana inclinata contigua, ac rursus ex pari altitudine descendat per plana totidem contigua, ita comparata ut singula altitudine respondeant singulis priorum planorum, sed majori quam illa sint inclinatione. Dico tempus descensus per minus inclinata, brevius esse tempore descensus per magis inclinata.

Sint series duæ planorum inter easdem parallelas horizontales comprehensæ A B C D E, F G H K L, atque ita ut oina quæque sibi correspondentia plana utriusque seriei inter easdem parallelas horizontalibus includantur, unumquodque vero seriei F G H K L magis inclinatum sit ad horizontem quam planum sibi altitudine respondens seriei A B C D E. Dico breviori tempore absolvi descensum per A B C D E, quam per F G H K L.

gallica.bnf.fr / Bibliothèque nationale de France

Nam primo quidem tempus descensus per A B, brevius esse constat tempore descensus per F G, quam sit eadem ratio horum temporum quæ rectarum A B ad F G *, sitque A B minor quam F G, propter minorem inclinationem. Producantur jam sursum rectæ C B, H G, occurrantque horizontali A F in M & N. Itaque tempus per B C post A B, æquale est tempori per eandem B C post M B, De motu in Circulis * Prop 7 huj



cum in puncto B eadem celeritas contingat, sive per A B, sive per M B descendenti * similiterque tempus per G H post F G, æquale erit tempori per eandem G H post N G. Est autem tempus per B C post M B ad tempus per G H post N G, ut B C ad G H longitudine, sive ut C M ad H N, cum hinc rationem habeant & tempora per totas M C, N H, & per partes M B, N G *, ideoque etiam tempora reliqua. Estque B C, minor quam G H propter minorem inclinationem. Patet igitur tempus per B C post M B sive post A B, brevius esse tempore per G H post N G sive post F G. * Prop 6 huj * Prop 7 huj

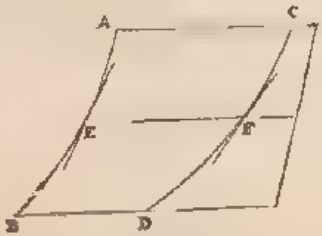
Similiter ostendemus, productis D C, K H sursum, donec occurrant horizontali A F in O & P, tempus per C D post A B C, sive post O C, brevius esse tempore per H K post F G H sive post P H. Ac denique tempus per D E post A B C D, brevius esse tempore per K L post F G H K. Quare totum tempus descensus per A B C D E, brevius erit tempore per F G H K L. quod erat demonstrandum.

Hinc vero manifestum est, considerando curvas lineas tanquam ex innumeris rectis compositas, si fuerint duæ superficies, secundum lineas curvas ejusdem altitudinis inclinatæ, quarum in punctis quibuslibet æque altis major semper sit inclinatio unius quam reliquæ, etiam tempore brevior per minus inclinatam grave descensurum quam per magis inclinatam.

Velut si sint duæ superficies inclinatæ secundum curvas A B, C D, æqualis altitudinis, quarumque in punctis æque altis quibuslibet E, F, major sit inclinatio ipsius C D quam A B, hoc est, ut

De motu in Cycloide.

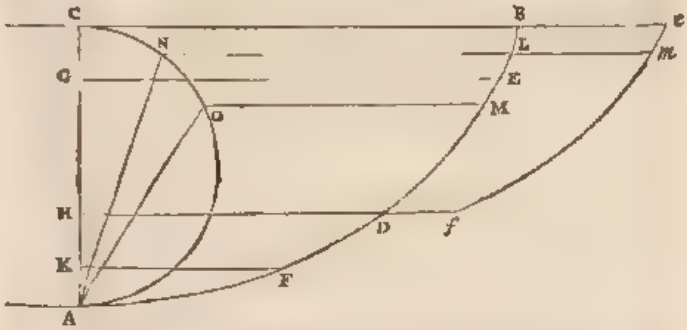
recta tangens curvam C D in F, magis inclinata sit ad horizontem, quam quæ curvam A B tangit in puncto E. erit tempus descensus per A B brevius quam per C D.



Idemque continget si altera linearum rectæ fuerit: dummodo inclinatio rectæ, quæ ubique est eadem, major minorve fuerit inclinatione curvæ in quolibet sui puncto.

PROPOSITIO XXII.

SI in Cycloide cujus axis ad perpendiculum erectus sit, vertice deorsum spectante, duæ portiones curvæ æqualis altitudinis accipiantur, sed quarum altera propior sit vertici, erit tempus descensus per superiorem, brevius tempore per inferiorem.



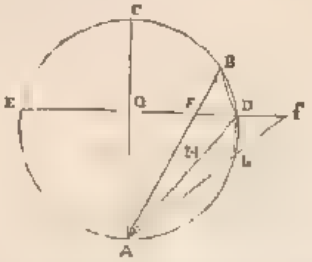
Sit Cyclois A B, cujus axis A C ad perpendiculum erectus, vertex A deorsum spectet, & accipiantur in ea portiones B D & E F, æqualis altitudinis, hoc est, ejusmodi ut parallelæ horizontales B C, D H, quæ superiorem portionem B D includunt, æque inter se

se distent ac E G, F K, inferiorem portionem E F includentes. Dico tempus descensus per curvam B D brevius fore tempore per E F. De Motu in Cycloide

Sumatur enim in B D punctum quodlibet L, & in E F punctum M, ita ut eadem sit altitudo E supra M quæ B supra L. Et descripto super axe A C semicirculo, occurrant ei rectæ horizontales L N, M O, in N & O, & jungantur N A, O A. Itaque quum punctum N sit altius puncto O, manifestum est rectam N A minus ad horizontem inclinari quam O A. Est autem ipsi N A parallela tangens curvæ in L puncto *, & ipsi O A parallela tangens curvæ in M. Ergo curva B D in puncto L minus inclinata est quam curva E F in puncto M. Quod si igitur portio E F, invariata inclinatione, altius extolli intelligatur velut in *e f*, ita ut inter easdem parallelas cum portione B D comprehendatur, invenietur punctum M in *m*, æquali altitudine cum puncto L. eritque etiam inclinatio curvæ *e f* in puncto *m*, quæ eadem est inclinationi curvæ E F in M, major inclinatione curvæ B D in L. Similiter vero, & in quolibet alio puncto curvæ *e f*, major ostendetur inclinatio quam curvæ B D in puncto æque alto. Itaque tempus descensus per B D brevius erit tempore per *e f* *, sive, quod idem est, per E F. quod erat demonstrandum. * Prop 13 hoj * Prop proxim.

LEMMA.

Esto circulus diametro A C, *quem secet ad angulos rectos* D E, *& à termino diametri* A *educta recta* A B *occurrat circumferentiæ in* B, *ipsi vero* D E *in* F. *Dico tres hasce*, A B, A D, A F, *proportionales esse.*



Sit enim primo intersectio F intra circulum, & arcui B D recta subtensa ducatur. Quia igitur arcus æquales sunt A E, A D, erunt anguli ad circumferentiam ipsis insistentes, E D A, A B D æqua-

De motu ex Cycloide

les. Itaque in triangulis A B D, A D F, æquales anguli A B D, A D F. Communis autem utrique est angulus ad A. Ergo dicti trianguli similes erunt, ideoque B A ad A D ut A D ad A F.

Sit jam punctum intersectionis *f* extra circulum, & ducatur *b* H parallela D F, quæ occurrat rectæ A D in H. Itaque secunda ut jam demonstrata erit ut D A ad A *b*, ita A *o* ad A H, hoc est, ita A *f* ad A D. Ideoque rursus proportionales erunt A *f*, A D, A *b*. Quare constat propositum.

PROPOSITIO XXIII.

Sit Cyclois A B C, *cujus vertex* A *deorsum conversus sit, axe* A D *ad perpendiculum erecto sumptoque in ea quolivet puncto* B, *ducatur inde deorsum recta* B I *quæ Cycloidem tangat, terminetur que recta horizontali* A I. *recta vero* B I *ad axem perpendicularis agatur, & divisa bifariam* F A *in* X, *super ea describatur semicirculus* F H A. *Ducta deinde per punctum quodlibet* G *in curva* B A *sumptum, rectâ* Σ G *parallelâ* B F, *quæ circumferentiæ* F H A *occurrat in* Λ, *axi* A D *in* Σ, *intelligantur per puncta* G *&* H *rectæ tangentes utriusque curvæ, earumque tangentium partes iisdem duabus horizontalibus* M S, N T *intercepta sint* M N, S T. *Iisdemque rectis* M S, N T *includantur tangentis* B I *pars* O P, *& axis* D A *pars* Q R.

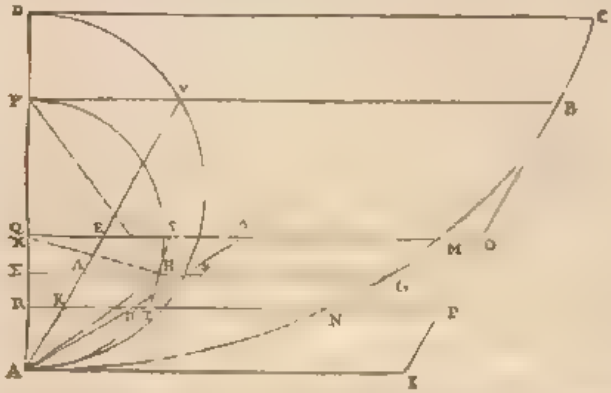
Quibus ita se habentibus, dico tempus quo grave percurret rectam M N, *celeritate æquabili quanta acquiritur descendendo per arcum Cycloidis* B G, *fore ad tempus quo percurretur recta* O P, *celeritate æquabili dimidia ejus quæ acquiritur descendendo per totam tangentem* B I, *sicut est tangens* S T *ad partem axis* Q R.

Describatur enim super axe A D semicirculus D V A secans rectam B F in V, & Σ G in Φ, & jungatur A V secans rectas O Q, P R, G Σ in E K & A Λ. Jungantur item H F, H A, H X & A Φ, quæ postrema secet rectas O Q, P R in punctis Δ & Π.

Habet ergo dictum tempus per M N ad tempus per O P, rationem eam quæ componitur ex ratione ipsarum linearum M N ad O P, & ex ratione celeritatum quibus ipsæ percurruntur, contrarie sumpta*, hoc est, & ex ratione dimidiæ celeritatis ex B I sive ex F A, ad celeritatem ex B G, sive ex F Σ*. Atqui tota celeritas ex

*Prop. 1 Gali de motu æquab. * Prop. 2 hu

F A ad celeritatem ex I Σ, est in subduplicata ratione longitudinum F A ad F Σ*, ac proinde eadem quæ F A ad F H. Ergo dimidia celeritas ex F A ad celeritatem ex F Σ erit ut F X ad F H. Ita que tempus dictum per M N ad tempus per O P habebit rationem compositam ex rationibus M N, ad O P, & F X ad F H. Harum vero prior ratio, nempe M N ad O P, eadem ostendetur quæ F H ad H Σ. De motu in Cycloide *Prop. 5 huj.



Est enim tangens Cycloidis D I parallela rectæ V A, similiter que tangens M G N parallela rectæ Φ A, ac proinde recta M N æqualis Δ Π, & O P æqualis E K. Ergo dicta ratio rectæ M N ad O P eadem est quæ Δ Π ad E K, hoc est, Δ A ad E A, hoc est, Φ A ad A A, hoc est V A ad Φ A * Est autem ut V A ad A Φ ita F A ad A H, nam quia quadratum V A æquale est rectangulo D A Γ, & quadratum A Φ æquale rectangulo D A Σ, quæ rectangula sunt inter se ut F A ad Σ A, hoc est ut quadratum F A ad quadratum A H, erit proinde & quadratum V A ad quadratum Φ A ut quadratum F A ad quadratum A H, atque etiam V A ad A Φ longitudine, ut F A ad A H. Ratio itaque M N ad O P, eadem erit quæ F A ad A H, hoc est, propter triangula similia F A H, F H Σ, eadem quæ F H ad H Σ, ut dictum fuit. Itaque dicta ratio temporis per M N ad tempus per O P, componitur ex rationibus F X ad F H & F H ad H Σ, ideo que eadem erit quæ F X sive X H ad H Σ. Sicut autem radius X H ad H Σ, ita est tangens S T ad rectam Q R, hoc enim facile per spicitur. Igitur tempus motus qualem diximus per M N, ad tempus per O P constat esse sicut S T ad Q R. quod erat demonstrandum. * Lemma hujus cod.

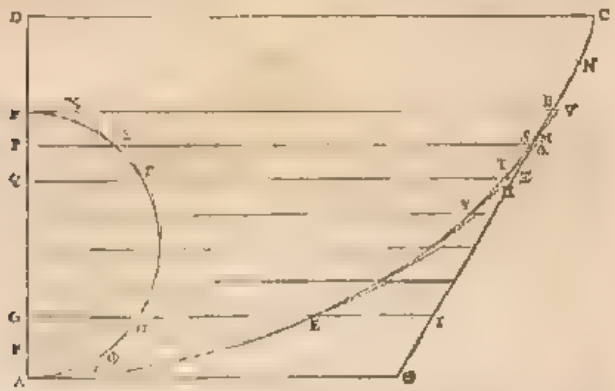
De motu simplicis.

PROPOSITIO XXIV.

Sit rursus ut in præcedenti propositione Cycloeis A B C, *cujus vertex* A *deorsum spectet, axis* A D *ad horizontem erectus sit; & sumpto in ea quovis puncto* B, *ducatur inde deorsum recta* B Θ *quæ Cycloidem tangat, occurratque rectæ horizontali* A Θ *in* Θ: *recta vero* B F *ad axem perpendicularis agatur, & super* F A *describatur semicirculus* F H A. *Deinde alia recta* C E, *parallela* F B, *secet Cycloidem in* I, *rectam* B Θ *in* L, *circumferentiam* F H A *in* H, *& denique axem* D A *in* G.

Duo tempus descensus per arcum Cycloidis B I, *esse ad tempus per tangentem* B L *cum celeritate dimidia ex* B Θ, *sicut arcus* F H *ad rectam* F G.

Si enim hoc verum non est, habebit tempus per arcum B I ad dictum tempus per B L, vel majorem rationem quam arcus F H ad rectam F G vel minorem. Habeat primo, si fieri potest, majorem.



Itaque tempus aliquod brevius tempore per B E (sit hoc tempus Z) erit ad dictum tempus per B I ut arcus F H ad rectam F G. Quod si jam in Cycloide supra punctum B sumatur punctum aliud N, erit tempus per B E post N B, brevius tempore per B E. Manifestum est autem punctum N tam propinquum sumi posse ipsi B, ut differentia eorum temporum sit quamlibet exigua, ac proinde ut minor sit ea qua tempus Z superatur a tempore per B E. Sit itaque

punctum N ita sumptum, unde quidem tempus per B E post N B E minor in F, erit majus erit tempore Z, majoremque proinde rationem habebit ad tempus dictum per B I cum dimidia celeritate ex I Θ, quam arcus F H ad rectam F G. Habeat itaque eam quam arcus F H O ad rectam F G.

Dividatur F G in partes æquales F P, P Q, &c. quarum unaquæque minor sit altitudine lineæ N B, atque item altitudine arcus H O, hoc enim fieri posse manifestum est, & à punctis divisionum agantur rectæ, basi D C parallelæ, & ad tangentem H Θ terminatæ P A, Q [illegible], &c. Quibusque in punctis hæ secant circumferentiam F H, ab eis, itemque a puncto H, tangentes furtim ducantur usque ad proximam quarum parallelam, velut Δ X, Γ Σ &c. Similiter vero & a punctis, in quibus dictæ parallelæ Cycloidi occurrunt, tangentes furtim ducantur velut S V, T M &c. additâ vero ad rectam F G parte una G R æqualis quæ ex divisione, cuique R Φ parallela similiter ipsi D C, patet eam occurrere circumferentiæ F H A inter H & O, quia G R minor est altitudine puncti H supra O. Iam vero sic porro argumentabimur.

Tempus per tangentem V S cum celeritate æquabili quæ acquireretur ex B S, majus erit tempore motus continue accelerati per arcum B S post N B. Nam celeritas ex B S minor est celeritate ex N B, propterea quod minor altitudo B S quam N B. At celeritas ex B S æquabiliter continuari ponitur per tangentem V S, cum celeritas acquirenda ex N B continue porro acceleretur per arcum B S, qui arcus minor insuper est tangente V S, omnibusque partibus suis magis erectus quam ulla pars tangentis V S. Adeo ut omnino majus fit futurum tempus per tangentem V S cum celeritate ex B S, tempore per arcum B S post N B. Similiter tempus per tangentem M T, cum celeritate ex B T, majus erit tempore per arcum S T post N S, & tempus post tangentem H Y cum celeritate ex B Y, majus tempore per arcum T Y post N T. Atque ita tempora motuum æquabilium per tangentes omnes usque ad infimam quæ tangit cycloidem in E, cum celeritatibus per singulas quantitates acquirendis cadendo ex B ad ipsum punctum ipsarum contactus, majora simul erunt tempore per arcum B E post N B. Eadem vero & minora essent, ut nunc ostendemus.

Considerentur enim denuo tempora eadem motuum æquabilium per tangentes cycloidis. Et est quidem tempus per tangentem V S cum celeritate ex B S, ad tempus per rectam B A cum celeritate dimidia ex F A, ut tangens circumferentiæ Δ X ad partem

De motu in Cycloide. * Prop. 70. 71. 72.

axis F P.* Similiterque tempus per tangentem M T, cum celeritate ex B T, ad tempus per rectam A Z cum eadem dimidia celeritate ex F A, ut tangens Σ ad rectam P Q. Atque ita deinceps singula tempora per tangentes cycloidis, quæ sunt eadem supradictis, erunt ad tempora motus æquabilis per partes sibi respondentes rectæ B I cum celeritate dimidia ex B Θ, sicut tangentes circumferentiæ F H, iidem parallelis comprehentæ, ad partes rectæ F G ipsis respondentes.

Sunt igitur quantitates quædam rectæ F P, P Q, &c. & totidem aliæ, tempora scilicet quibus percurruntur rectæ B A, A Z &c., motu æquabili cum celeritate dimidia ex B Θ. Et unaquæque quantitas in prioribus ad sequentem eadem proportione refertur, qua unaquæque posteriorum ad suam sequentem, sunt enim utrobique inter se æquales. Quibus autem proportionibus priores quantitates ad alias quasdam, nempe ad tangentes circum Δ X, Γ Σ, &c., referuntur, iisdem proportionibus & eodem ordine posteriores quoque referuntur ad alias quasdam, nempe ad tempora motus qualem diximus per tangentes cycloidis V S, M T &c. Ergo, sicut se habent omnes simul priores ad omnes eas ad quas ipsæ referuntur, hoc est, sicut tota F G ad tangentes omnes X Δ, Γ Σ, &c. ita tempus quo percurritur tota B I cum celeritate dimidia ex B Θ, ad tempora omnia motuum quales diximus per tangentes cycloidis V S, M T, &c.* Et invertendo itaque, tempora motuum dictorum per tangentes cycloidis, ad tempus per rectam B I cum celeritate dimidia ex B Θ, eandem rationem habebunt quam dictæ tangentes omnes circumferentiæ F H ad rectam F G, ac minorem proinde quam arcus F O ad rectam eandem F G, quia arcus F Φ, ideoque omnino & arcus F O major est dictis omnibus arcus F H tangentibus.* Atqui tempus per B E post N B, ad tempus per B I cum celeritate dimidia ex B Θ, posuimus esse ut arcus F O ad rectam F G. Ergo dicta tempora omnia per tangentes cycloidis minora simul erunt tempore per B E post N B, cum antea majora esse ostensum sit, quod est absurdum. Itaque tempus per arcum cycloidis B E, ad tempus per tangentem B I, cum celeritate dimidia ex B Θ vel ex F A, non habet majorem rationem quam arcus circumferentiæ F H ad rectam F G.

* Prop. 8. Archimedis de Sphæroid. & Conoid.

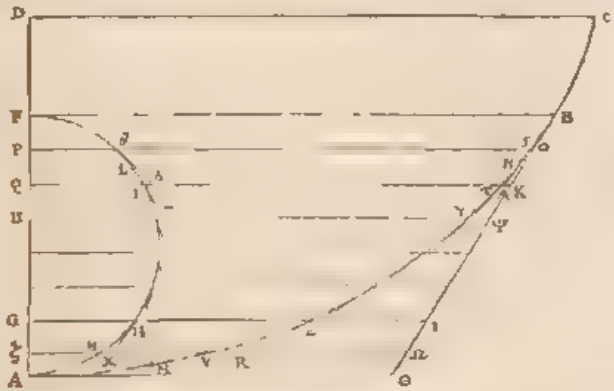
* Prop. 20. hu.

Habeat jam, si potest, minorem. Ergo tempus aliquod majus tempore per arcum B E, sit hoc tempus Z erit ad tempus dictum per B I, ut arcus F H ad rectam F G.

Quod si jam sumatur arcus N M æqualis altitudine cum arcu B

E, sed cujus terminus superior N sit humilior puncto B, erit tempus per arcum N M majus tempore per arcum B E *. Manifestum autem quod punctum N tam propinquum sumi potest puncto B, ut differentia dictorum temporum sit quamlibet exigua, ac proinde minor ea qua tempus Z superat tempus per arcum B E. Sit itaque punctum N ita sumptum. Unde quidem tempus per N M minus erit tempore Z, habebitque proinde ad dictum tempus per B I, cum dimidia celeritate ex B Θ, minorem rationem quam arcus F H ad rectam F G. Habeat ergo eam quam arcus I H ad rectam F G.

De Motu in Cycloide Prop. 22 hujus.



Dividatur jam F C in partes æquales F P, P Q, &c. quarum unaquæque minor sit arcus cycloidis B N altitudine, itemque minor altitudine arcus circumferentiæ F E, & addita ad F G una earum partium G Z, ducantur a punctis divisionum rectæ basi D C parallelæ, & ad tangentem B Θ terminatæ, P O, Q K, &c. itemque a puncto Z recta Z Ω, quæ secet cycloidem in V, circumferentiam in Y, quibusque in punctis ductæ parallelæ secant circumferentiam F H, ab iis tangentes deorsum ducantur usque ad proximam quæque parallelam, velut Y Δ, Y Σ. Quarum infima a puncto H ducta occurrat rectæ Z Ω in X. Similiter vero & a punctis, in quibus dictæ parallelæ occurrunt cycloidi, ducantur totidem tangentes deorsum, velut S Λ, T Ξ, &c. quarum infima, tangens nempe à puncto E ducta, occurrat rectæ Z Ω in R.

Quia igitur P O æqualis est F G altitudini arcus B E, cui æqualis est ex constructione altitudo arcus N M, erit & P O æqualis altitudini arcus N M. Est autem recta P O ex constructione superior ter

Tr. motu in Cycloide

mino N. Ergo & ζ Ω, & in ea punctum V, superius termino M. Quare, cum arcus S V æqualis sit altitudinis cum arcu N M, sed termino S sublimiore quam N, erit tempus per S V brevius tempore per N M*.

*Prop. 22 hujus.

Atque tempus per tangentem S A, cum celeritate æquabili ex B S, brevius est tempore descensus accelerati per arcum S T, incipientis in S. Nam celeritas ex B S, qua tota S A transmissa ponitur, æqualis est celeritati ex B T*, quæ motui per arcum S T in fine demum acquiritur, ipsaque S A minor est quam S T. Similiter tempus per tangentem T Z, cum celeritate æquabili ex B T, brevius est tempore descensus accelerati per arcum T V post S T; quam celeritas ex B T, qua tota T Z transmissa ponitur, sit æqualis celeritati ex S V, quæ in fine demum acquiritur motui dicto per arcum T V post S T, ipsaque T Z minor sit arcu T V. Atque ita tempora omnia motuum æquabilium per tangentes cycloidis, cum celeritatibus per singulas quantæ acquiruntur descendendo ex B usque ad punctum ipsarum contactus, breviora simul erunt tempore descensus accelerati per arcum S V. Eadem vero & longiora essent, ut nunc ostendemus.

*Prop. 22 hujus.

Est enim tempus dictum per tangentem S A, cum celeritate æquabili ex B S, ad tempus per rectam O K cum celeritate æquabili dimidia ex B Θ, sicut tangens semicirculi θ Δ ad rectam P Q*. sin utrique tempus per tangentem T X, cum celeritate æquabili ex B T, est ad tempus per rectam K Ψ cum celeritate æquabili dimidia ex B Θ, ut tangens Γ Σ ad rectam Q Π. Atque ita deinceps singula tempora per tangentes cycloidis, quæ sunt eadem supra dictis, erunt ad tempora motus æquabilis per partes sibi respondentes rectæ O Ω, cum celeritate dimidia ex B Θ, ut tangentes circumferentiæ θ ∞, illdem parallelis inclusæ, ad partes rectæ P ζ ipsis respondentes. Vnde, ut in priori parte demonstrationis, concludetur omnes simul rectas P Q, Q Π &c. hoc est, totam P ζ esse ad omnes simul tangentes θ Δ, Γ Σ, &c. sicut tempus quo percurritur tota O Ω, cum celeritate dimidia ex B Θ, ad tempora omnia motuum quales diximus per tangentes cycloidis O A, T Z, &c. Quare & convertendo, tempora omnia per tangentes cycloidis, eam rationem habebunt ad tempus dictum motus æquabilis per rectam O Ω, sive per B I, quam dictæ tangentes omnes arcus ∞ ∞ ad rectam P ζ vel I G, ac proinde majorem quam arcus L H ad rectam I G, est enim arcus θ H, adeoque etiam omnino arcus L H, minor dictis tangentibus arcus θ ∞*. Sed tempus per N M posuimus

mus ab initio ad idem tempus per B I se habere ut arcus I H ad rectam F G. Ergo tempus per N M, multoque magis tempus per S V, minus erit tempore per tangentes cycloidis. Quod est absurdum, cum hoc tempus, illo per arcum S V, antea minus ostensum fuerit. Patet igitur tempus per arcum cycloidis B E ad tempus per tangentem B I cum celeritate æquabili dimidia ex B Θ, non minorem rationem habere quam arcus F H ad rectam F G. Sed nec majorem habere ostensum fuit. Ergo eandem habeat necesse est. quod erat demonstrandum. De motu in Cycloide

PROPOSITIO XXV.

IN Cycloide cujus axis ad perpendiculum erectus est, vertice deorsum spectante, tempora descensus quibus mobile, à quocunque in ea puncto dimissum, ad punctum imum vertices pervenit, sunt inter se æqualia; habentque ad tempus casus perpendicularis per totum axem cycloidis eam rationem, quam semicircumferentia circuli ad diametrum.

Esto cyclois A B C cujus vertex A deorsum spectet, axis vero A D ad perpendiculum erectus sit, & a puncto quovis in cycloide sumpto, velut B, descendat mobile impetu naturali per arcum B A, sive per superficiem ita inflexam. Dico tempus descensus hujus esse ad tempus casus per axem D A, sicut semicircumferentia circuli ad diametrum. Quo demonstrato, etiam tempora descensus, per quoslibet cycloidis arcus ad A terminatos, inter se æqualia esse constabit.

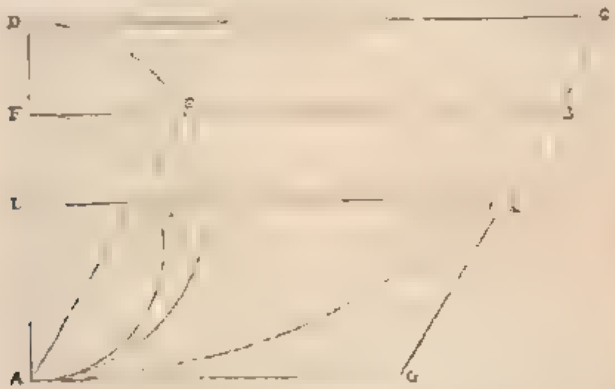
Describatur super axe D A semicirculus, cujus circumferentiam secet recta B F, basi D C parallela, in E, junctaque E A, ducatur ei parallela B G, quæ quidem cycloidem tanget in B. Eadem vero occurrat rectæ horizontali per A ductæ in G: sitque etiam super F A descriptus semicirculus F H A.

Est igitur, per præcedentem, tempus descensus per arcum cycloidis B A, ad tempus motus æquabilis per rectam B G cum celeritate dimidia ex B G, sicut arcus semicirculi F H A ad rectam F A. Tempus vero dicti motus æquabilis per B G, æquatur tempori descensus naturaliter accelerati per eandem B G, sive per E A, quæ ipsi parallela est & æqualis, hoc est, tempori descensus accelerati per axem D A*. Itaque tempus per arcum B A, erit quoque ad tempus descensus per axem D A, ut semicirculi circumferentia F H A ad diametrum F A quod erat demonstrandum. * Prop. 6 Gal. de motu Accel.

De motu in Cycloide.

Quod si tota cycloidis cavitas perfecta ponatur, constat mobile, postquam per arcum B A descenderit, inde continuato motu per alterum ipsi æqualem arcum ascensurum *, atque in eo tantundem temporis atque descendendo consumpturum *. Deinde

* Prop. 9 hu.
* Prop. 11 hu.



rursus per A ad B perventurum, ac singularum ejusmodi reciprocationum, in magnis parvisve cycloidis arcubus peractarum, tempora fore ad tempus casus perpendicularis per axem D A, sicut circumferentia circuli tota ad diametrum suam.

PROPOSITIO XXVI.

Iisdem positis, si ducatur insuper recta horizontalis H I *quæ arcum* B A *secet in* I, *circumferentiam vero* F H A *in* H: *dico tempus per arcum* B I, *ad tempus per arcum* I A *post* B I, *eam rationem habere quam arcus circumferentiæ* F H *ad* H A.

Occurrat enim recta H I tangenti B G in K, axi D A in L. Est itaque tempus per arcum B A, ad tempus motus æquabilis per B G, cum celeritate dimidia ex B G, sicut arcus F H A ad rectam F A *. Tempus autem dicti motus æquabilis per B G, est ad tempus motus æquabilis per B K, cum eadem celeritate dimidia ex B G, sicut B G ad B K longitudine, hoc est, sicut F A ad F L. Et rursus tempus motus æquabilis, cum dicta celeritate, per B K, ad tempus per arcum B I, sicut F L ad arcum F H *. Igitur ex æquo erit tempus per arcum B A ad tempus per B I, ut arcus F H A ad F H. Et dividendo, & convertendo, tempus per B I, ad tempus per I A post B I, ut arcus F H ad H A. quod erat demonstrandum.

* Prop. 14 hu.
* Prop. 14 hu.

HOROLOGII OSCILLATORII

PARS TERTIA.

De linearum curvarum evolutione & dimensione.

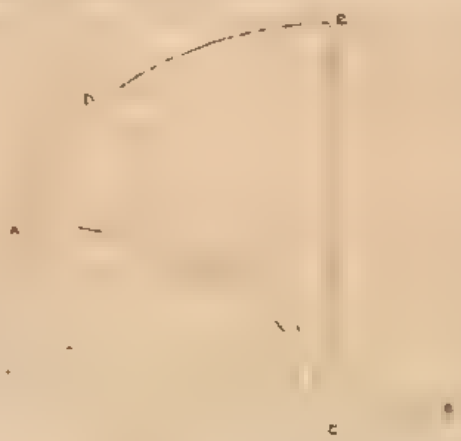
DEFINITIONES.

I.

LINEA in unam partem inflexa vocetur quam rectæ omnes tangentes ab eadem parte contingunt. Si autem portiones quasdam rectas lineas habuerit, ha ipsæ productæ pro tangentibus habentur.

II.

Cum autem duæ hujusmodi lineæ ab eodem puncto egrediuntur, quarum convexitas unius ovversa sit ad cavitatem alterius, quales sunt in figura adscripta curvæ A B C, A D E, *ambæ in eandem partem cavæ dicantur.*



III.

Si linea, in unam partem cava, filum seu linea flexilis circumplicata intelligatur, & manente una fili extremitate illi

DE LINEARVM CVRVARVM EVOLVTIONE

affixa, altera extremitas abducatur, ita ut pars ea quæ soluta est semper extensa maneat, manifestum est curvam quandam aliam hac fili extremitate describi. Vocetur autem ea, Descripta ex evolutione.

IV.

Illa vero cui filum circumplicatum erat, dicatur Evoluta. In figura superiori, A B C *est evoluta,* A D L *descripta ex evolutione* A B C, *ut nempe cum extremitas fili ex* A *venit in* D, *pars fili extensa sit* D B *recta, reliqua parte* B C *adhuc applicata curvæ* A B C. *Manifestum est autem* D B *tangere evolutam in* B.

PROPOSITIO I.

R*Ecta omnis, quæ evolutam tangit, occurret lineæ ex evolutione descriptæ ad angulos rectos.*

Sit A B evolata, A H vero quæ ex evolutione illius descripta est. Recta autem F D C, tangens curvam A D in D, occurrat in C curvæ A C H. Dico ei occurrere ad angulos rectos: hoc est, si ducatur C E recta perpendicularis C D, dico eam in C tangere curvam A C H. Quia enim D C tangit evolutam in D, apparet ipsam referre positionem fili tunc cum ejus extremitas pervenit in C. Quod si igitur ostenderimus filum, in tota reliqua descriptione curvæ A C H, nusquam pertingere ad rectam C E præterquam in C puncto, ma-

Source gallica.bnf.fr / Bibliothèque nationale de France

nifestum erit rectam C E ibidem curvam A C H contingere.

Sumatur punctum aliquod in A C præter C, quod sit H, sitque primo remotius a principio evolutionis A quam punctum C, & intelligatur pars libera esse H G, cum extremitate sua ad H pervenit. Tangit ergo H G lineam A B in G. Cumque interea dum describitur pars curvæ C H, evolutus sit arcus D G, occurret G D a parte D producta ipsi H G, ut in E. Ponatur autem G H occurrere rectæ C E in E. Quia igitur duæ simul D E, E G, majores sunt quam D G, sive curva ea fuerit sive recta: fiet addendo utrinque rectam D C, ut rectæ C E, E G simul majores sint recta C D & ipsa D G. Sed propter evolutionem, apparet utrisque simul, rectæ C D, & lineæ D G, æquari rectam H G. Ergo duæ simul C E, E G majores quoque erunt recta H G, & ablata communi E G, erit C E major quam H E. Sed E B major est quam E C, quia angulus C trianguli E C B est rectus. Ergo E B omnino major quam E H. Vnde apparet, ab hac quidem parte puncti C, illi extremitatem non pertingere ad rectam C E.

Sit jam punctum H propinquius principio evolutionis A quam punctum C. sitque illi positio H G, tunc cum ejus extremitas esset in H, & ducantur rectæ D G, D H, quarum hæc occurrat rectæ C E in E. apparet autem D G rectam non posse esse in directum ipsi H G, adeoque H G D fore triangulum. Iam quia recta D G vel minor est quam D X G, vel eadem, si nempe evolutæ pars D G recta sit; addita utrique G H, erunt rectæ D G, G H simul minores vel

DE LINEARUM CURVARUM EVOLUTIONE

æquales duabus istis, scilicet D K G & G H, sive his æquali rectæ D C. Duabus autem rectis D G, G H minor est recta D H. Ergo hæc minor utique erit rectâ D C. Sed D E major est quam D C, quia in triangulo D C E angulus C est rectus. Ergo D H multo minor quam D E. Situm est ergo punctum H, hoc est extremitas filii G H, intra angulum D C E. Vnde apparet neque inter A & C usquam illam pertingere ad rectam C E. Ergo C E tangit curvam A C in C, ac proinde D C, cui C E ducta est perpendicularis, occurrit curvæ ad angulos rectos: quod erat demonstrandum.

Hinc etiam manifestum est curvam A H C in partem unam inflexam esse, & in eandem partem cavam ac ipsa A G B, cujus evolutione adscripta est. Omnes enim tangentes lineæ A H C, cadunt extra spatium D G A H C: omnes vero tangentes lineæ A G D, intra dictum spatium: unde liquet cavitatem A H C respicere convexitatem A G D.

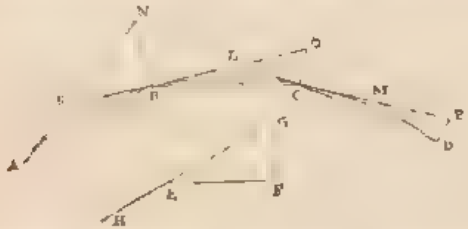
PROPOSITIO II.

Omnis curva linea terminata, in unam partem cava, ut A B D, *potest in tot partes dividi, ut si singulis partibus subtensæ rectæ ducantur, velut* A B, B C, C D, *& a singulis item divisionis punctis, ipsaque curvæ extremitate rectæ ducantur curvam tangentes, ut* A N, B O, C P, *quæ occurrant iis quæ in proximis sequentibus divisionis punctis curvæ ad angulos rectos insistunt, quales sunt lineæ* B N, C O, D P, *ut inquam subtensa quæque habeat ad sibi adjacentem curvæ perpendicularem, velut* A B *ad* B N, B C *ad* C O, C D *ad* D P, *rationem majorem quavis ratione proposita.*

Sit enim data ratio lineæ E F ad F G, quæ recto angulo ad F jungantur, & ducatur recta G E H.

Intelligatur primo curva A B D in partes tam exiguas secta punctis B, C, ut tangentes quæ ad bina quæque inter se proxima puncta curvam contingunt, occurrant sibi mutuo secundum angulos qui singuli majores sint angulo F E H, quales sunt anguli A K B, B L C, C M D: quod quidem fieri posse evidentius est quam ut demonstratione indigeat. Ductis jam intentis A B, B C, C D, & erectis curvæ perpendicularibus B N, C O, D P, quæ occurrant productis A K, B L, C M, in N, O, P: dico rationes singulas rectarum, A B ad B N, B C ad C O, C D ad D P, majores esse ratione E F ad F G

Quia enim angulus A K B major est angulo H E F, erit residuus illius ad duos rectos, nimirum angulus N K B, minor angulo G E F. DE LINEARUM CURVARUM EVOLUTIONE

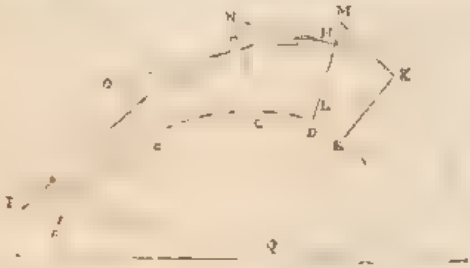


Angulus autem B trianguli K B N est rectus, sicut & angulus F in triangulo E F G. Ergo major erit ratio K B ad B N quam E F ad F G. Sed A B major est quam K B, quoniam angulus K in triangulo A K B est obtusus, est enim major angulo H E F qui est obtusus ex constructione. Ergo ratio A B ad B N major erit ratione K B ad B N, ac proinde omnino major ratione E F ad F G. Eodem modo & ratio B C ad C O, & C D ad D P, major ostenderetur ratione E F ad F G. Itaque constat propositum.

PROPOSITIO III.

DVæ curvæ in unam partem inflexæ & in easdem partes cavæ ex eodem puncto egredi nequeunt, ita ad se invicem comparatæ, ut recta omnis quæ alteri earum ad angulos rectos occurrit, similiter occurrat & reliquæ.

Sint enim, si fieri potest, hujusmodi lineæ curvæ A C E, A G K, communem terminum habentes A, & sumpto in exteriore illarum



puncto quolibet K, sit inde educta K E recta, curvæ A G K occurrens ad angulos rectos, ac proinde etiam curvæ A C E.

DE EXHIBENDIS CURVIS PER EVOLUTIONEM.

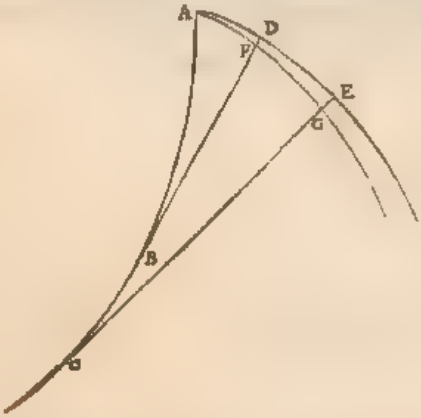
Potest jam recta quædam sumi major curva K G A, quæ sit Q. Divisa autem intelligatur ipsa K G A, ut in propositione antecedenti dictum fuit, in tot partes punctis H G F, ut subtensæ singulæ K H, H G, G F, F A, ad perpendiculares curvæ sibi contiguas H M, G N, F O, A P majorem rationem habeant quam linea Q ad rectam K E. Itaque & omnes simul dictæ subtensæ ad omnes dictas perpendiculares majorem habebunt rationem quam Q ad K E. Producantur autem perpendiculares eædem & occurrant curvæ A C E in D, C, B, nimirum ad angulos rectos ex hypothesi. Erit jam K E minor quam M D. Etenim, ducta E L ipsi K E perpendiculari, quoniam K E occurrit lineæ curvæ E C A ad angulos rectos, tanget E L curvam A C E, occurretque necessario rectæ M D inter D & M. Vnde cum K E sit brevissima omnium quæ cadunt inter parallelas E L, K M, erit ea minor quam M L, ac proinde minor quoque omnino quam M D. Eodem modo & H D minor ostendetur quam N C, & G C minor quam O B, & F B minor quam P A. Cum sit ergo P A major quam F B, erunt duæ simul P A, O F majores quam O B. Item quum O B sit major quam G C, erunt duæ simul O B, N G, majores quam N C. Sed duæ P A, O F majores erant quam O B. Itaque tres simul P A, O F, N G omnino majores erunt quam N C. Rursus, quia N C major quam H D, erunt duæ simul N C, M H majores quam M D. Vnde, si loco N C sumantur tres hæ ipsa majores P A, O F, N G, erunt omnino hæ quatuor P A, O F, N G, M H majores quam M D: ac proinde eædem quoque omnino majores recta K E, quia ipsa M D major erat quam K E. Diximus autem subtensas omnes A F, F G, G H, H K majorem rationem habere ad omnes perpendiculares P A, O F, N G, M H, quam linea Q ad K E. Ergo cum dictis perpendicularibus minor etiam sit K E, habebunt dictæ subtensæ ad K E omnino majorem rationem quam Q ad K E. Ergo subtensæ simul sumptæ majores erunt recta Q. Hæc autem ipsa curvâ A G K major sumpta fuit. Ergo subtensæ A F, F G, G K, H K simul majores erunt curva A G K cujus partibus subtenduntur, quod est absurdum, cum singulæ suis arcubus sint minores. Non igitur poterunt esse duæ curvæ lineæ quæ quemadmodum dictum fuit sese habeant, quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO IV.

SI ab eodem puncto duæ lineæ exeant in partem unam inflexæ, & in eandem partem cavæ, sitque vero mutuo comparatæ

parata ut rectæ omnes, quæ alteram earum contingunt, alteri occurrant ad angulos rectos; posterior hæc prioris evolutione, à puncto communi cœpta, describetur. DE LINEARUM CURVARUM EVOLUTIONE

Sunto lineæ A B C, A D E, in partem unam inflexæ, & quarum utraque in easdem partes cava existat, habeantque communem terminum A punctum. Omnes autem rectæ tangentes lineam A B C, velut B D, C E, occurrant lineæ A D E ad angulos rectos. Dico evolutione ipsius A B C, a termino A incepta, describi A D E

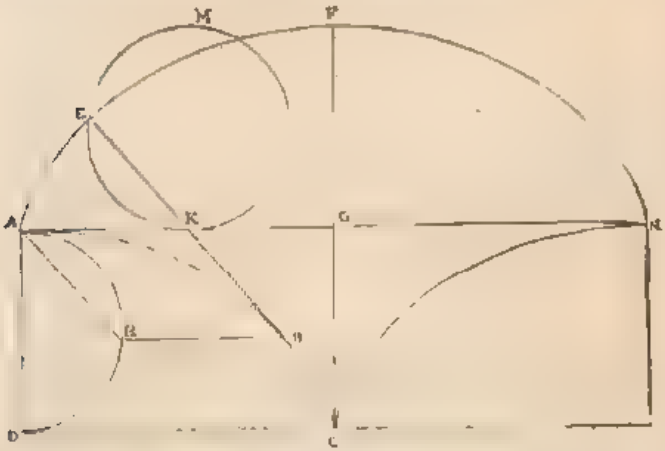


Si enim fieri potest, describatur dicta evolutione alia quædam curva A F G. Ergo lineæ rectæ quælibet, evolutam A B C tangentes, ut B D, C E, occurrent ipsi A F G ad angulos rectos *, puta in F & G. Sed eædem tangentes etiam ad rectos angulos occurrere ponuntur lineæ A D E. Sunt igitur lineæ curvæ A D F, A F G, eodem puncto A terminatæ, inque partem unam flexæ, & ambæ in eandem partem cavæ, quippe utraque in eandem atque ipsa A B C; nam de linea A D E constat ex hypothes., de A F G vero ex propositione prima hujus, & omnes quæ uni earum occurrunt ad angulos rectos, etiam alteri similiter occurrunt. quod quidem fieri non posse antea ostensum est *. Quare constat ipsam A D E descriptum iri evolutione lineæ A B C quod erat demonstrandum. * Prop. hu. * Prop. 5. hu.

PROPOSITIO V.

SI Cycloidem recta linea in vertice contingat, super qua, tanquam basi, alia cyclois priori similis & æqualis constituatur, initium sumens à puncto dicti verticis; recta qualibet inferiorem cycloidem tangens, occurret superioris portioni, sibi superposita, ad angulos rectos.

Tangat cycloidem A B C in vertice A recta A G, super qua, tanquam basi, similis alia cyclois constituta sit A B F, cujus vertex F. Cycloidem autem A B C tangat recta B K in B. Dico eam productam occurrere cycloidi A B F ad angulos rectos.



Describatur enim circa A D, axem cycloidis A B C, circulus genitor A H D, cui occurrat B H, basi parallela, in H, & jungatur H A. Quia ergo B K tangit cycloidem in B, constat eam parallelam esse rectæ H A *. Itaque A H B K parallelogrammum est, ac proinde A K æqualis H B, hoc est, arcui A H *. Sit porro jam descriptus circulus E M, genitori circulo, hoc est ipsi A H D, æqualis, qui tangat basin A G in K, rectam vero B K productam secet in puncto E. Quia ergo ipsi A H parallela est B K E, ac proinde angulus E K A æqualis K A H, manifestum est B K productam abscindere à circulo K M arcum æqualem ei quem à circulo A H D abscindit recta A H. Itaque arcus K E æqualis est arcui A H, hoc est rectæ H B, hoc est rectæ K A. Hinc

* Propos. 11. partis 1.
* Propos. 14 partis 1.

vero sequitur, ex cycloidis proprietate, cum circulus genitor M K tangebat regulam in K, punctum describens fuisse in E. Itaque recta K E occurrit cycloidi A E ad angulos rectos *. Est autem K E ipsa B K producta. Ergo patet producta B K occurrere cycloidi ad angulos rectos, quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO VI.

Semicycloidis evolutione, à vertice cœpta, alia semicyclois describitur evoluta æqualis & similis, cujus basis est in ea recta quæ cycloidem evolutam in vertice contingit.

Sit semicyclois A B C, ea superimposita sit alia similis A E F, quemadmodum in propositione præcedenti. Dico, si linea flexilis, circa semicycloidem A B C applicata, evolvatur, incipiendo ab A, eam describere extremitate sua ipsam semicycloidem A E F. Quia enim ex puncto A egrediuntur semicycloides A B C, A E F, in unam partem inflexæ, & ambæ in eandem cavæ, ac præterea illa compositæ, ut omnes tangentes semicycloidis A B C occurrant semicycloidi A E F ad angulos rectos, sequitur hanc evolutione illius, a termino A incepta, describi * quod erat demonstrandum.

Et apparet, si dimidiam cycloidem, ipsi A B C gemellam, contrario situ ab altera parte lineæ C G disponamus, velut C N, ejus evolutione, vel etiam dum filum, jam extensum in C F, circa eam replicatur, alteram semicycloidem F N H extremitate describi, quæ simul cum priore A E F integram constituat.

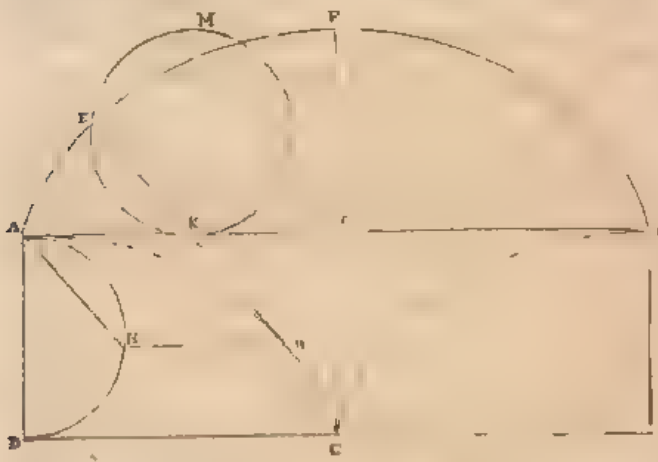
Atque ex his, & propositione 25 de descensu gravium, manifestum jam est quod supra in Constructione Horologii de æqualibus pendulis motu circulari fuit. Patet enim perpendiculum, inter laminas binas, secundum semicycloidem ut flexas suspensum agitatum que, motu suo cycloidis arcum describere, ac proinde æqualibus temporibus qualibet ejus recipricationes absolvi. Non refert enim utrum in superficie, secundum cycloidem curvata, mobile feratur, an filo alligatum lineam ipsam in aere percurrat, cum utrobique eandem libertatem, eandemque in omnibus curvæ punctis inclinationem ad motum habeat.

PROPOSITIO VII.

Cycloidis linea sui axis, sive diametri circuli genitoris, quadrupla est.

DE LINEARVM CURVARVM EVOLVTIONE.

Repetita enim figura præcedenti cum post totam semicycloidem A B C evolutam, filum occupet rectam C F, quæ dupla est A D, propterea quod axes cycloidum A B C, A E F sunt æquales, apparet semicycloidem ipsam A B C, filo sibi circum applicito æqualem, duplam esse sui axis A D, ac totam proinde cycloidem axis sui quadruplam.



Apparet etiam tangentem B F, quæ refert partem fili extensam, antea curvæ parti B A applicatam, hanc ipsi longitudine æqua . Est autem B E dupla ipsius B K, sive A H, quoniam in propositione quinta ostensum est K E ipsi A H æqualem esse Itaque pars cycloidis A B rectæ A H, sive B K, dupla erit, existente nimirum B H parallela basi cycloidis: idque ubicumque in ea punctum B sumptum fuerit.

Hanc cycloidis dimensionem primus invenit, via tamen longe alia, eximius geometra Christophorus Wren Anglus, eamque deinde eleganti demonstratione confirmavit, quæ edita est in libro de cycloide viri clarissimi Ioannis Wallisij. De eadem vero linea, alia quoque multa extant pulcherrima inventa nostri temporis mathematicorum, quibus præcipue occasionem præbuere problemata quædam a Blasio Pascharlio Gallo proposita, qui in his studiis præcelleat. Is cum sua, tum aliorum inventa recensens, primum omnium Mersennum lineam hanc in rerum natura advertisse ait. Primum Robervallium tangentes ejus defini-

visse, ac plana & solida dimensum esse. Item centra gravitatis tum plani, tum partium ejus invenisse. Primum Wrennium curvæ cycloidis æqualem rectam dedisse. Me quoque primum repetisse dimensionem absolutam portionis cycloidis, quæ rectâ, basi parallela, abscindatur per punctum axis, quod quarta parte ejus à vertice abest: quæ nimirum portio æquatur dimidio hexagono æquilatero, intra circulum genitorem descripto. Scriptum denique solidorum ac semisolidorum, tam circa basin quam circa axem, centra gravitatis detinuisse, itemque partium eorum. Lineæ etiam ipsius: sed hæc post acceptam à Wrennio dimensionem centrum gravitatis invenisse, & dimensionem superficierum convexarum, quibus solida ista eorumque partes comprehenduntur, earumque superficierum centra gravitatis. Ac denique dimensionem curvarum cujusvis cycloidis, tam protractæ quam contractæ: hoc est earum quæ describuntur à puncto intra vel extra circumferentiam circuli genitoris sumpto. Et horum quidem demonstrationes à Patcnio sunt editæ. A quibus suas quoque, de eadem linea, subtilissimas meditationes exposuit Cl. Wallisius, atque eadem illa omnia suo marte se reperisse, ac prælectionibus à Patcnio propositis invisse contendit. Quod idem & doctissimus Loveria sibi vindicat. Quantum vero unicuique debeatur, ex scriptis eorum eruditi dijudicent. Nos propterea tantum præcedentia retulimus, quod silentio prætereunda non videbantur egregia adeo inventa, quibus factum est ut, ex lineis omnibus, nulla nunc melius aut penitius quam cyclois cognita sit. Methodum vero nostram, qua in hac metienda usi sumus, in aliis quoque experiri libuit, de quibus porro nunc agemus.

DE CURVARUM CRAVARUM EVOLUTIONE

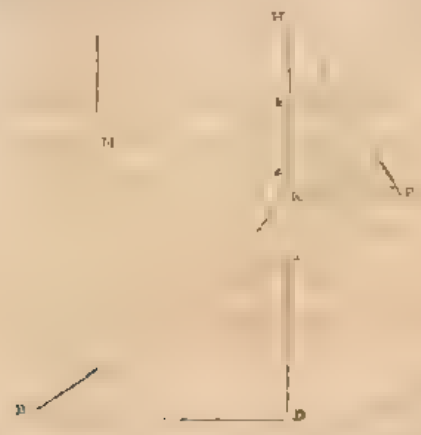
PROPOSITIO VIII.

Cujus linea evolutione parabola describatur ostendere.

Sit parabolo des A B, cujus axis A D, vertex A, proprietas autem ista, ut ordinatim ad axem applicata B D, cubus abscissæ ad verticem D A æquetur solido, basin habenti quadratum D B, altitudinem vero æqualem lineæ cuidam datæ M, quæ quidem curva pridem geometris nota fuit, & ponatur axi D E juncta in directum A E, quæ habeat ipsius M. Jam si filum continuum circa E A B applicetur, idque ab E evolvi incipiat, dico descri-

DELINEARUM CURVARUM EVOLUTIONE.

ptam ex evolutione esse parabolam E F, cujus axis E A G, vertex E, latus rectum æquale duplæ E A.



Sumpto enim in curva A B puncto quolibet B, ducatur quæ in ipso tangat curvam recta B G, occurrens axi E A in G. & ex G ducatur porro G F, quæ ad rectos angulos occurrat parabolæ E F in F, & sit ipsi G F perpendicularis F H, quæ parabolam in F continget, & denique F K ordinatim ad axem E G applicetur.

Est igitur K G æqualis dimidio latere recto, hoc est, ipsi E A, ac proinde, addita vel ablata utrinque A K, erit E K æqualis A G. Est autem A G tricns ipsius A D, quoniam B G tangit paraboloidem in B: illud enim ex natura curvæ hujus facile demonstrari potest. Ergo & E K æqualis est tricnti A D: & K H, quæ ex natura parabolæ dupla est K E, æquabitur duabus tertiis A D. Itaque cubus ex K H æqualis est cubi ex A D, hoc est, solido basin habenti quadratum D B, altitudinem vero æqualem A M, hoc est, ipsi A E. Quamobrem ut quadratum D B ad quadratum K H, ita erit K H longitudine ad A E, hoc est ad K G. Erat autem K H æqualis A D, hoc est ipsi G D. Ergo ut quadratum B D ad quadratum D G ita est H K ad K G. Vt autem H K ad K G, ita est quadratum F K ad quadratum K G. Ergo sicut quadratum B D ad quadratum D G, ita quadratum F K ad quadratum K G. Et proinde sicut B D ad D G longitudine, ita F K ad K G. Vnde sequitur B G F esse lineam rectam. Sed G F occurrit parabolæ E F ad angulos rectos. Ergo apparet B G, tangentem paraboloidis, productam occurrere eidem parabolæ ad

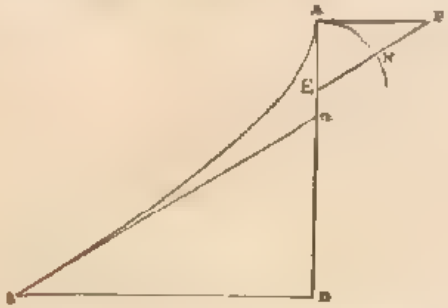
angulos rectos. Idque similiter de quavis illius tangente demonstrabitur. Ergo constat ex evolutione lineæ E A B, a termino E incepta, describi parabolam E F *. quod erat demonstrandum.

* DE CINERARUM CURVARUM SECTIONE Prop. 4. hu.

PROPOSITIO IX.

Rectam lineam invenire æqualem datæ portioni curvæ paraboloidis, ejus nempe in qua quadrata ordinatim applicatarum ad axem, sunt inter se sicut cubi abscissarum ad verticem.

Quomodo hoc fiat ex prop. præcedenti manifestum est. Parabola vero E F ad constructionem non requiritur, quæ sic peragetur. Data quavis parte paraboloidis hujus A B, cui rectam æqualem invenire oportet, ducatur B G tangens in puncto B, quæ occurrat axi A G in G. Tanget autem si A G fuerit tertia pars A D, inter



verticem & ordinatim applicatam B D intercepta. Porro sumpta A B æquali lineæ M, quæ latus rectum est paraboloidis A B, ducatur F E parallela B G, occurratque lineæ A F, quæ parallela est B D, in F. Jam si ad rectam B G addatur N F, excessus rectæ E F supra F A, habebitur recta æqualis curvæ A B. Cujus demonstratio ex antedictis facile perspicitur.

Semper ergo curva A B tantum superat tangentem B G, quantum recta E F rectam E A.

Rursus autem hic in lineam incidimus, cujus longitudinem alii jam ante dimensi sunt. Illam nempe quam anno 1659 Joh. Heuratius Harlemensis rectæ æqualem ostendit, cujus demonstratio post commentarios Jo. Schotenii in Cartesii Geometriam, eodem anno editam, adjecta est. Et ille quidem omnium primus curvam lineam, ex earum numero quarum puncta quælibet geo-

DE REBUS CURVAR. IN SPIRAL. CAP.

metricè definiantur, ad hanc mensuram reduxit, cum sub idem tempus Cycloidis longitudinem dedisset Wrennius, non minus ingenioso epicheremate.

Scio equidem, ab edito Heuratii inventio, Doctissimum Wallisium Wilhelmo Nelio, nobili apud suos juveni, idem attribuere voluisse, in libro de Cissoide. Sed mihi, quæ ille adferit perpendenti, videtur non multum quidem ab invento illo Neliam abfuisse, neque tamen plane id adiecutum esse. Namneque ex demonstratione ejus, quam Wallisius affert, apparet illum satis perspexisse quænam fore curva illa, cujus, si construeretur, mensuram datam fore videbat. Et credibile est, si fecisset ex earum numero esse quæ jampridem Geometris cognitæ fuerant, vel ipsum, vel alios ejus nomine, tam nobile inventum Geometris maturius imperituros fuisse, quod, si quod aliud, merebatur ut Archimedem illud εὕρηκα exclamarent. Sane ejusdem inventi, tanquam à se protecti, etiam Fermatius, Tholosanus senator ac Geometra peritissimus, demonstrationes conscripsit, quæ anno 1660 excusæ sunt; sed illæ sero utique.

Cum vero in his simus, etiam de nobis dicere liceat, quid ad promovendum tam eximium inventum contulerimus. Siquidem & Heuratio ut eo perveniret occasionem præbuimus, & dimensionem curvæ parabolicæ ex hyperbolæ data quadratura, quæ Heuratiani inventi pars est, antè ipsi in atque omnium primi reperimus. Etenim sub finem anni 1657 in hæc duo simul incidimus, curvæ parabolicæ quam dixi dimensionem, & superficiei conoidis parabolici in circulum reductionem. Cumque Schotenio, aliisque item amicorum, per literas indicassemus, duo quædam non vulgaria circa parabolam inventa nobis se obtulisse, eorumque alterum esse conoidicæ superficiei extensionem in circulum, ille literas eas cum Heuratio, quo tum familiariter utebatur, communicavit. Huic vero, acutissimo ingenio viro, non difficile fuit intelligere, conoidis illius superficiei affinem esse dimensionem ipsius curvæ parabolicæ. Qua utraque inventa, ulterius inde investigans, in alias istas curvas paraboloides incidit, quibus rectæ æquales absolute inveniuntur.

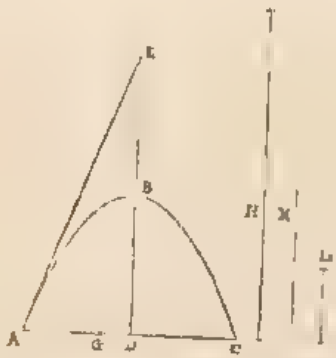
Ac de Conoidis quidem superficie in planum redacta, ne quis forte testimonium desideret, pauca hæc adscribere visum est ex literis viri clarissimi, atque inter præcipuos hodie Geometras censendi, Franc. Slusii, quibus eo ipso anno mihi inventum illud, ac prolixius forte quam pro merito, gratulatus est. In quibus literis

24. Decemb. anni 1657. datis, ista habentur. *Duo tantum addo, unum* &c. *Alterum est, me has omnes curvas, ipsumque adeo locum linearem integrum, nihil pene facere præ invento hoc tuo, quo superficiei in conoide parabolico rationem ad circulum suæ baseos demonstrasti. Hanc pro circuli quadratura pulcherrimam ἀπαγωγὴν prefero libens iis omnibus, quas ex loco lineari nec paucas olim deduxi, & quas tecum, si ita jusseris, data occasione communicabo.* DE LINEARUM CURVARUM EVOLUTIONE

Anno autem insequenti etiam superficies conoidum hyperbolicorum & sphæroidum reperi, quomodo ad circulos reduci possent, constructionesque eorum problematum, non addita tamen demonstratione, Geometris quibuscum tunc litterarum commercium habebam, in Gallia Fatchario aliisque, in Anglia Wallisio imperiti, qui non multo post sua quoque super his, una cum aliis multis subtilibus inventis in lucem edidit, fecitque ut nostris demonstrationibus perficiendis supersederem. Quoniam vero non inelegantes visæ sunt constructiones nostræ, neque adhuc publice extant, placet hoc loco illas adscribere.

Conoidis parabolici superficiei curvæ circulum æqualem invenire.

Sit datum conoides cujus sectio per axem parabola A B C; axis ejus B D, vertex B, diameter basis A C, qui sit axi B D ad an



gulos rectos. Et oporteat superficiei portionis curvæ invenire circulum æqualem.

K

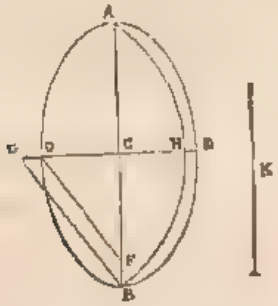
DE LINEARVM CVRVARVM EVOLVTIONE.

Producto axe à parte verticis, sumatur B E æqualis B D, & jungatur E A, quæ parabolam A B C in A continget. Porro secetur A D in G, ut sit A G ad G D sicut E A ad A D. Et utrique simul A E, D G æqualis statuatur recta H. Item trienti basis A C æqualis sit recta I, & inter H & I media proportionalis inveniatur K. qua tanquam radio circulus describatur. Is æqualis erit superficiei curvæ conoidis A B C. Hinc sequitur, si fuerit A E dupla A D, superficiem conoidis curvam ad circulum baseos fore ut 14 ad 9. Si A E tripla A D, ut 15 ad 6. si A E quadrupla A D, ut 14 ad 5. Atque ita semper fore ut numerus ad numerum, si A E ad A D ejusmodi rationem habuerit.

Sphæroidis oblongi superficiei circulum æqualem invenire.

ESto sphæroides oblongum cujus axis A B, centrum C, sectio per axem ellipsis A D B E, cujus minor diameter D E.

Ponatur D F æqualis C B, seu ponatur F alter focorum ellipseos A D B E, rectæque F D parallela ducatur B G, occurrens productæ

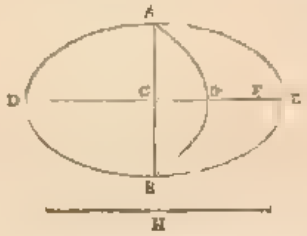


E D in G centroque G, radio G B, describatur super axe A B arcus circumferentiæ B H A. Interque semidiametrum C D & rectam utrique æqualem, arcui A H B & diametro D E, media proportionalis sit recta K. Erit hæc radius circuli qui superficiei sphæroidis A D B E æqualis sit.

Sphæroidis lati sive compressi superficiem circulum æqualem invenire.

SIt sphæroides latum cujus axis A B, centrum C, sectio per axem ellipsis A D B E

Sit rursus focorum alteruter F, divisâque bifariam F C in G, intelligatur parabola A G B quæ basin habeat axem A B, verticem



vero punctum G. Sitque inter diametrum D E, & rectam curvæ parabolicæ A G B æqualem, media proportionalis linea H. Erit hæc radius circuli qui superficiem sphæroidis propositi æqualis sit

Conoidis hyperbolici superficiem curvæ circulum æqualem invenire.

ESto conoides hyperbolicum cujus axis A B, sectio per axem hyperbola C A D, cujus latus transversum E A, centrum F, latus rectum A G.

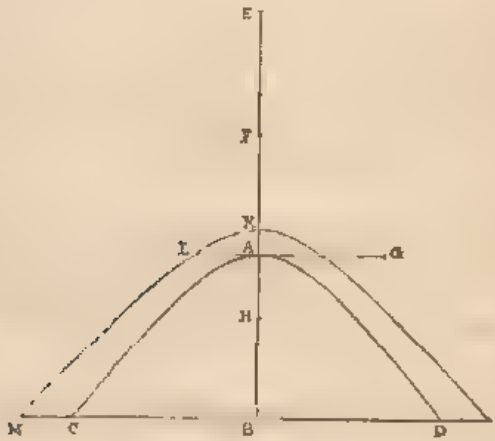
Sumatur in axe recta A H, æqualis dimidio latere recto A G & ut H F ad A F longitudine ita, sit A F ad F K potentia. Et intelligatur vertice K alia hyperbola descripta K I M, eodem axe & centro F cum priore, quæque latera rectum & transversum illi reciproce proportionalia habeat. Occurrat autem ipsi producta B C in M, sitque A I parallela A C. Erit jam sicut spatium A I M B, tribus rectis lineis & curva hyperbolica comprehensum, ad dimidium quadratum ex B C, ita superficies conoidis curva ad circulum baseos suæ, cujus diameter C D. Unde constructio reliqua facile absolvetur, positâ hyperbolæ quadraturâ

Quum igitur conoidis parabolici superficies ad circulum redigatur, æque ac superficies sphæræ, ex notis geometriæ regulis, in superficie sphæroidis oblongi, ut idem fiat, ponendum est arcus

DE SINTARUM CURVARUM EVOLUTIONE

circumferentiæ longitudinem æquari posse lineæ rectæ. Ad sphæroidis vero latus, itemque ad conoidis hyperbolici superficiem eadem ratione complanandam, hyperbolæ quadratura requiritur. Nam parabolicæ lineæ longitudo, quam in sphæroide hoc adhibuimus, pendet a quadratura hyperbolæ, ut mox ostendemus.

Verum, quod non indignum animadversione videtur, invenimus absque ulla hyperbolicæ quadraturæ suppositione, circulum æqualem construi superficiei utrique simul, sphæroidis lati & conoidis hyperbolici.

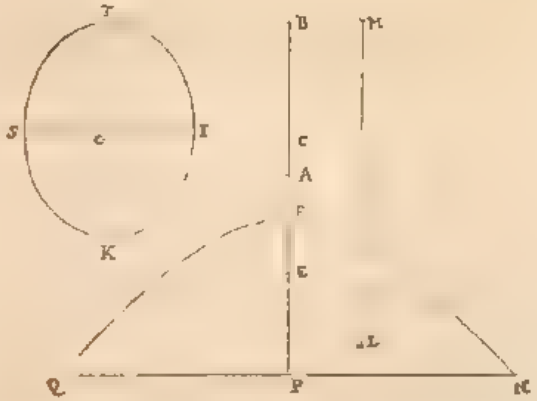


Dato enim sphæroide quovis lato, posse inveniri conoides hyperbolicum, vel contra, dato conoide hyperbolico, posse inveniri sphæroides latum ejusmodi, ut utriusque simul superficiei exhibeatur circulus æqualis, cujus exemplum in casu uno cæteris simpliciore sufficiet attulisse.

Sit sphæroides latum cujus axis S I, secto per axem ellipsis S T I K, cujus ellipsis centrum O, axis ma or T K ponatur autem ellipsis hæc ejusmodi, ut latus transversum S K habeat ad latus rectum eam rationem, quam linea secundum extremam & mediam rationem secta, ad partem sui majorem.

Sumatur B C potentia dupla ad S O, item B A potentia dupla ad O K. & sint hæ quatuor continuæ proportionales B C, B A, B F,

B E, & ponatur E P æqualis E A. Intelligatur jam conoides hyperbolicum Q E N, cujus axis E P; axi adjecta, sive, latus transversum F B, dimidium latus rectum æquale B C



Hujus conoidis superficies curva, una cum superficie sphæroidis S I, æquabitur circulo cujus datus erit radius M L, qui nempe possit quadratum T K cum duplo quadrato S I.

Curvæ parabolicæ æqualem rectam lineam invenire

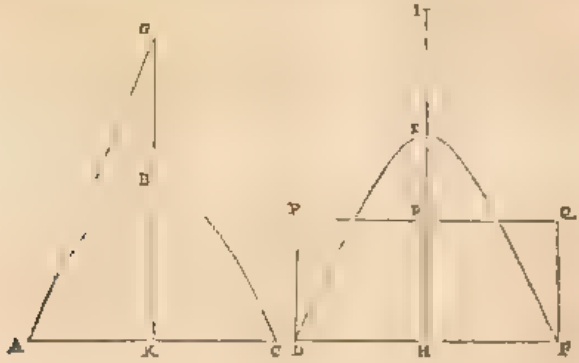
SIt parabolæ portio A B C, cujus axis S B K, basis A C axi ad angulos rectos, & oporteat curvæ A B C rectam æqualem invenire

Accipiatur basi dimidiæ A K æqualis recta I E, quæ producatur ad H, ut sit I H æqualis A G, quæ parabolam in puncto basis A contingens, cum axe producto convenit in G. Sit jam portio hyperbolæ D E F, vertice E, centro I descriptæ, cujusque diameter sit E H, basis vero D H F ordinatim ad diametrum applicata. Latus rectum pro lubitu sumi potest. Quod si jam super basi D F intelligatur parallelogrammum constitutum D P Q F, quod portioni D E F æquale sit, ejus latus P Q ita secabit diametrum hyperbolæ in R, ut R I sit æqualis curvæ parabolicæ A B, cujus dupla est A B C.

Apparet igitur hinc quomodo à quadratura hyperbolæ pendeat curvæ parabolicæ mensura, & illa ab hac vicissim.

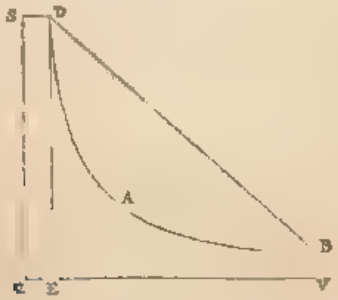
DE LINEARUM CURVARUM SOLUTIONE

Quæcunque vero problemata ad alterum e duobus hisce reducuntur, quamliber veræ proximam solutionem per numeros ac-



cipiunt, logarithmorum admirabili invento. Cum per hos hyperbolæ quadratura, ut olim invenimus, numeris quam proxime explicetur. Est autem regula hujusmodi.

Sit D A R portio hyperbolæ, cujus asymptoti C S, C V, ductis D E, B V parallelis asymptoto S C.



Accipiatur differentia logarithmorum qui conveniunt numeris, eandem inter se rationem habentibus quam rectæ D E, B V, ejusque differentiæ quæratur logarithmus. Cui addatur logarith-

mus hic (qui semper est idem) 0, 36221, 56887. Summa erit logarithmus numeri qui spatium D E V B A D designabit, tribus rectis & curva D A B comprehensi, in partibus qualium parallelogrammum D C est 100000, 00000. Vnde porro facile quoque habebitur area portionis D A B. DE INTERIORIBUS CURVARUM EVOLUTIONE

Sit ex. gr. proportio D E ad B V ea quæ 36 ad 5.

Ab	1, 55630, 25008,	logar^{m}. 36.
auferatur	0, 69897, 00043.	logar^{m}. 5.
Erit	0, 85733, 14965.	differ. logar^{omm}.
Et	9, 93314, 92856.	logar^{m}. differentiæ,
Cui addatur	0, 36221, 56887	logar semper addendus
Fit	10, 29536, 49743.	logar^{m}. spatii D E V B A D

Habebit hujus logarithmi numerus 11 characteres, quum characteristica sit 10. Quæratur itaque primo numerus proxime minor, conveniens invento logarithmo, qui numerus est 19740. Deinde ex differentia logarithmi ejusdem, & proxime eum in tabula sequentis, reliqui characteres efficiantur 81026, scribendi post priores, ut fiat 19740-8, 10260, addito ad finem zero, ut efficiatur numerus characterum 11. Est ergo area spatii D E V B A D proxime partium 19740-8, 10260, qualium partium parallelogrammum D C est 100000, 00000.

PROPOSITIO X.

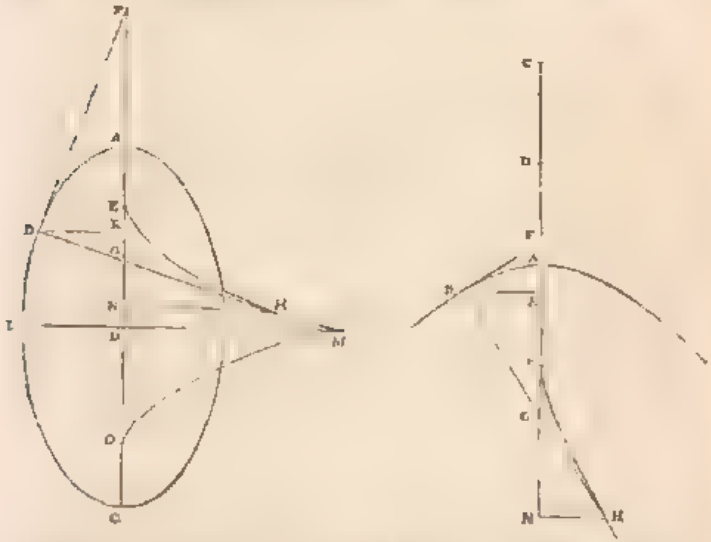
Lineas curvas exhibere quarum evolutione ellipses & hyperbolæ describantur, rectasque invenire iisdem curvis æquales.

Sit ellipsis vel hyperbole quælibet A B, cujus axis transversus A C, centrum figuræ D, latus rectum duplum ipsius A E. Et sumpto in sectione quovis puncto, ut B, applicetur ordinatim ad axem recta B K, & ad eadem punctum B tangens ducatur quæ conveniat cum axe in F; sitque B G ipsi F B perpendicularis, axique occurrat in G; & producatur B G usque ad H, ut B H ad H G habeat rationem eam quæ componitur ex rationibus G F ad F K, & A D ad D E.

Dico curvam E H M, cujus puncta omnia inveniuntur eodem modo quo punctum H, esse eam cujus evolutione, una cum recta E A, describetur secto A B. Ipsam autem B H tangere curvam in

DE LINEARVM CVRVARVM EVOLVTIONE

H, & esse toti H B A æqualem. Quamobrem, si ab H B auferatur E A, reliqua recta portioni curvæ H E æquabitur. Apparet autem, cum curvæ puncta quævis indifferenter, certaque ratione inventantur, esse eam utrobique ex earum genere, quæ mere geometricæ censentur. Vnde & relatio horum omnium punctorum ad puncta axis A C, æquatione aliqua exprimi poterit, quam æquationem ad sextam dimensionem ascendere invenio, minimumque habere ter-



minorum, si fuerit A B hyperbola cujus latera transversum rectumque æqualia. Tunc enim ducta ex quovis curvæ puncto, ut H, ad axem C A N perpendiculari H N, vocataque A C, a, C N, x, & N H, y, erit semper cubus ab $xx-yy-aa$ æqualis $27\,xxyyaa$. Sed hoc casu brevius quoque multo, quam prædicta constructione, curvæ E H M puncta reperiri possunt, ut in sequentibus ostenderur.

Cæterum notandum est, in ellipsi singulos quadrantes singularum linearum evolutione describi, sicut quadrans A B I evolutione lineæ A E H M, quadrans C I evolutione similis huic oppositæ C O M. Est enim hæc in sectione utraque diversitas, quod cum principium quidem curvæ E H M, tam in ellipsi quam in hyperbola, sit punctum E, sumpta A E æquali lateris recti, in hyperbola in infinitum inde dicta linea extenditur, at in ellipsi finitur in

in puncto axis minoris M, sumpta L M æquali, lateris recti, secundum quod possunt ordinatim applicatæ ad dictum minorem axem. Namque hos terminos esse hujus curvæ, facile apparebit ortum ejus considerantibus, quodque in ellipsi est sicut A D ad D E, ita L M ad M D. DE LINEARUM CURVARUM EVOLUTIONE

Horum autem demonstrationi non immorabimur, sed ad ipsam methodum tradendam pergemus, qua & hæ curvæ ex sectionibus conicis, & aliæ innumeræ ex aliis quibuscunque datis inveniuntur.

PROPOSITIO XI.

Datâ lineâ curvâ, invenire aliam cujus evolutione illa describatur; & ostendere quod ex unaquaque curva geometrica, alia curva itidem geometrica existat, cui recta linea æqualis dari possit.

Sit curva quæpiam, vel pars ejus, in partem unam inflexa A B F, & recta K L, ad quam puncta omnia referantur; & oporteat invenire curvam aliam, ut D E, cujus evolutione ipsa A B F describatur.

Ponatur jam inventa, & quoniam tangentes omnes curvæ D E, necesse est occurrere lineæ A B F, ex evolutione descriptæ, ad angulos rectos; patet quoque vicissim eas quæ ipsi A B F ad rectos angulos insistunt, ut B D, F E, tacturas evolutam C D E.

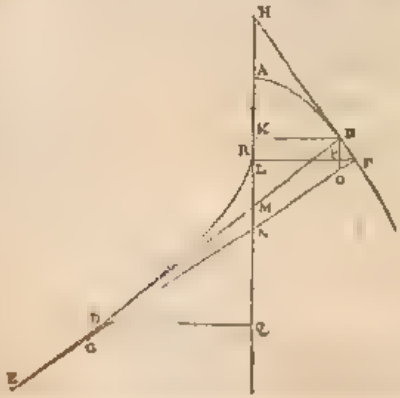
DE LINEARVM CVRVARVM EVOLVTIONE

Intelligantur autem puncta B, F, inter se proxima, & si quidem à parte A evolutio incipere ponatur, ulterioresque inde distet I quam B, etiam contactus E ulterius quam D distabit ab A, intersectio vero rectarum B D, F E, quæ est G, cadet ultra punctum D in recta B D. Nam concurrere ipsas B D, F E necesse est, cum curvæ B F ad partem cavam insistant rectis angulis.

Quanto autem punctum F ipsi B propinquius fuerit, tanto propius quoque puncta D, G & E convenire apparet: ideoque, si interstitium B F infinite parvum intelligatur, tria dicta puncta pro uno eodemque erunt habenda, ac præterea, ducta recta B H, quæ curvam in B tangat, eadem quoque pro tangente in F cognoscetur. Sit B O parallela K L, & in hanc perpendiculares cadant B K, F I: secetque F I rectam B O in P, & sint puncta notata M, N, in quibus rectæ, B D, F E, occurrant ipsi K L. Quia igitur ratio B G ad G M est eadem quæ B O ad M N, data hac dabitur & illa, & quia recta B M datur magnitudine ac positione, dabitur & punctum G in producta B M, sive D in curva C D E, quia G & D in unum convenire diximus. Datur autem ratio B O ad M N, simpliciter quidem in Cycloide, ubi primum omnium illam investigavimus, inveniuntque duplam, in aliis vero curvis, quas hactenus examinavimus, per duarum datarum rationum compositionem. Nam quia ratio B O ad M N componitur ex rationibus B O ad B P, sive N H ad I H, & ex B P sive K L ad M N; patet istarum rationes hæ utræque dentur, etiam ex iis compositam rationem B O ad M N datam esse. Illas vero dari in omnibus curvis geometricis, in sequentibus patebit, ac proinde iis semper curvas adsignari posse, quarum evolutione determinantur, quæque ideo ad rectas lineas sint reducibiles.

Ponatur primo parabola esse A B F, cujus vertex A, axis A Q. Cum igitur lineæ B M, F N, sint parabolæ ad angulos rectos, ductæque sint ad axem A Q perpendiculares B K, F I, erunt, ex proprietate parabolæ, singula M K, N I dimidio lateris recto æquales, & ablata communi I M, æquales inter se K L, M N. Hinc, quum ratio B G ad G M componatur ex rationibus N H ad H L, & K L ad M N, uti dictum fuit, sitque earum posterior ratio æqualitatis, liquet rationem B G ad G M fore eandem quæ N H ad H L, & dividendo, B M ad M G, eandem quæ N I ad I H, sive M K ad K H, nam I H, K H pro eadem habentur, propter propinquitatem punctorum B, F. Data autem est ratio M K ad K H, dato puncto B, quoniam ratio M K, quam K H dantur magnitudine, nam M K æquatur dimidio lateris recto, K H vero duplæ K A. Datque etiam est positione & magni-

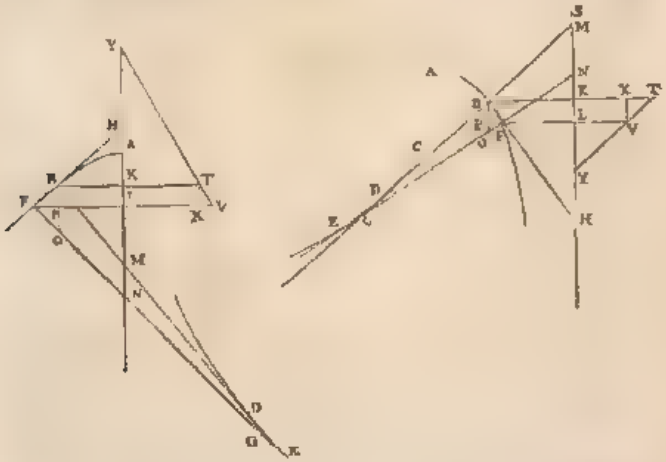
tudine recta B M. Ergo & M G data erit, adeoque & punctum G, sive D, in curva R D E, quod nempe invenitur productâ B M usque in G, ut sit B M ad M G sicut lateris recti ad duplam K A. DE LINEARUM CURVARUM EVOLUTIONE



Et sic quidem, adsumptis in parabola A B F aliis quotlibet punctis præter B, totidem quoque puncta lineæ R D E, simili ratione, invenientur, atque hoc ipso lineam R D E geometricam esse constat, unaque proprietas ejus innotescit, ex qua cæteræ deduci possunt. Vt si inquirere deinde velimus, quanam æquatione exprimatur relatio punctorum omnium curvæ C D E ad rectam A Q: ducta in hanc perpendiculari D Q, vocatoque latere recto parabolæ A B F, a, A K, b; A Q, x, Q D, y. Quoniam ratio B M ad M D, hoc est, K M ad M Q, est ea quæ a ad $2b$, estque ipsa K M = $\frac{1}{2}a$, erit & M Q æqualis $2b$. Est autem M A = $\frac{1}{2}a + b$. ergo A Q sive x æqualis $3b + a$. Vnde $b = \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}a$. Porro quoniam, sicut quadratum M K, hoc est, $\frac{1}{4}aa$ ad quadratum K B, hoc est, ab, ita qu M Q, hoc est, $4bb$ ad qu Q D; erit qu Q D, sive $yy = \frac{16}{9}bb$. Vbi, si in locum b substituatur $\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}a$, quod illi æquale inventum est, fiet $yy = \frac{16}{9}$ cub. $\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}a$ divisis per a. Ac proinde $\frac{1}{3}ayy =$ cubo ab $\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}a$. Accipiatur A R in axe parabolæ $= \frac{1}{3}a$, erit que R Q $= \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}a$. Curvam igitur C D ejus naturæ esse liquet, ut semper cubus lineæ R Q æquetur parallelepipedo, cujus basis qu Q D, altitudo $\frac{1}{3}a$, ac proinde ipsam paraboloidem esse, cujus evolutione describi parabolam A B supra ostendimus, cujus nimirum paraboloidis latus rectum æquetur $\frac{4}{3}$ lateris recti parabolæ A B. tunc enim hujus latus rectum æquale fit $\frac{4}{3}$ lateris recti paraboloidis, quemadmodum ibi fuit definitum.

DE LINEARVM CVRVARVM EVOLVTIONE.

Quomodo porro ratio O B ad B P, sive N H ad H L, non tantum cum A B E parabola est sed etiam alia quælibet curva geometrica, semper invenirí possit manifestum est. Quoniam tantum recta E H ducenda est, quæ curvam in adsumpto puncto E tangat, & E N ipsi E H perpendicularis; unde N H & H L datæ erunt, ac proinde ratio quoque earum data.



At non æque liquet quo pacto ratio K I ad M N innotescat, quam tamen semper quoque reperiri posse sic ostendemus.

Sint rectæ K T, L V, perpendiculares super K I, sitque K T æqualis K M, & I V æqualis L N, & ducatur V X parallela I N, quæ occurrat ipsi K T in X. Quoniam ergo semper eadem est differentia duarum I K, N M, quæ duarum L N, K M, hoc est, quæ duarum L V, K T; est autem differentia ipsarum L V, K T æqualis X T, & X V ipsi L K, erit proinde N M æqualis duabus simul V X, X T, vel ei quo V X ipsam X T superat. Atque adeo, si data fuerit ratio V X ad X T, data quoque erit ratio V X ad utramque simul V X, X T, vel ad excessum V X supra X T, hoc est, data erit ratio V X sive I K ad N M.

Sciendum est autem, quoniam K T ipsi K M, & L V ipsi L N, æquales sumptæ sunt, locum punctorum T, V, fore lineam quandam vel rectam vel curvam datam, ut mox ostenderur. Et siquidem sit linea recta, ut contingit si A B E conisectio fuerit, & K L axis ejus, constat rationem V X ad X T datam fore, data positione ipsius lineæ V T, quæ locus est punctorum V, T, temperque eam-

dem tunc habet dictam rationem, qualecunque fuerit intervallum K L. DE LINEARUM CURVARUM EVOLUTIONE.

At si locus alia linea curva fuerit, diversa erit ratio V X ad X T, prout majus minusve fuerit intervallum K L. Inquirendum est autem quænam futura sit illa ratio, cum K L infinite parvum imaginamur, quoniam & puncta B, F, proxima invicem posuimus. Similiter itaque & puncta V, T, lineæ curvæ minimam particulam intercipere intelligendum est, unde recta V T, cum ea quæ in T curvam contingit, coincidet. Sit ergo tangens illa T Y; potest enim duci quoniam curva, ad quam sunt puncta T, V, geometrica est. Ratio igitur V K ad K T data erit, adeoque & V X ad X T ex qua etiam rationem L K ad N M dari ostendimus.

Quænam vero sit linea ad quam sunt puncta T, V, invenitur ponendo certum punctum S in recta K L, & vocando S K, x, K T, y. Nam quia data est curva A B T, eique B M ad angulos rectos ducta, invenietur inde quantitas lineæ K M, per methodum tangentium a Cartesio traditam, quæ ipsi K T, sive y æquabitur, & ex ea æquatione, natura curvæ T V innotescet, ad quam deinde tangens ducenda est. Sed clariora omnia fient sequenti exemplo.

Sit A B F parabolo-ides illa, cui superius rectam æqualem invenimus, in qua nempe cubi perpendicularium in rectam S K, sint inter se sicut quadrata ex ipsa S K abscissarum. Et oporteat invenire curvam C D E cujus evolutione parabolo-ides S B F describatur.

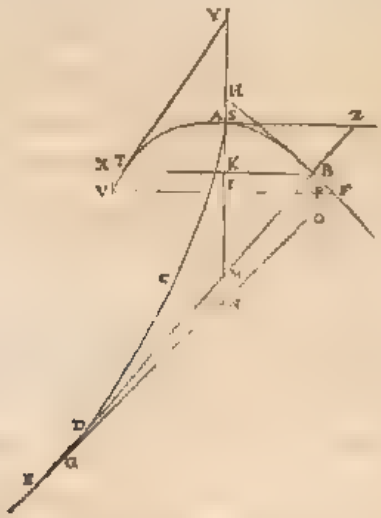
Hic primum ratio B O ad B P facile invenitur, quia tangentem parabolo-idis in puncto B duci scimus, scilicet S H æquali S K. Cui tangenti cum B M ad angulos rectos insistat, dantur jam lineæ M H, H K, ac proinde earum inter se ratio, qua est eadem quæ O B ad B P.

Ut autem ratio B P, sive K L ad M N innotescat, ponantur ad K L perpendiculares rectæ K T, L V, æquales singulis K M, L N, sitque V X parallela L K. Jam quia ex duabus simul K L, L N, auferendo K M, relinquitur V X, hoc est, auferendo ex duabus X V, V L, sive X V, X K simul K T, hinc autem relinqui apparet V X & X T: erunt igitur ipsi V X, X T ipsi M N æquales, ac proinde ratio K L ad M N eadem quæ V X ad duas simul V X, X T. Ut autem hæc ratio innotescat cum intervallum K L est minimum; oportet secundum prædicta inquirere quis sit locus, sive linea ad quam sunt puncta T, V. Quod ut fiat sit latus rectum parabolo-idis A B F = a; S K = x, K T = y.

Quia igitur proportionales sunt K H, K B, K M, estque H K =

DEFINIENDAE CURVARUM EVOLUTIONES.

: x:KB ex natura paraboloidis æqualis R. cub. $aax + y^3$: fiet KM, hoc est KT $= \frac{1}{3}$ R. cub. $aax + y^3$, ac proinde $\frac{1}{27}aax + y^3$. Vnde patet locum punctorum T, V, esse paraboloidem illam, quam cubicam vocant geometræ. Cui proinde ad T tangens ducetur, sumptâ SY duplâ ipsius SK, junctâque YT. Et jam quidem ratio VX ad duas simul VX, XT, quam diximus eandem esse ac KL ad MN, erit ea quæ YK ad utramque simul YK, KT. Hæc autem ratio data est, ergo & ratio KL ad MN. Sed & rationem OB ad PB datam esse ostensum est. Ergo, cum ex duabus hisce componatur ratio BD ad DM, ut supra patuit, dabitur & hæc, & dividendo, ratio BM ad MD, adeoque & punctum D in curva DE.

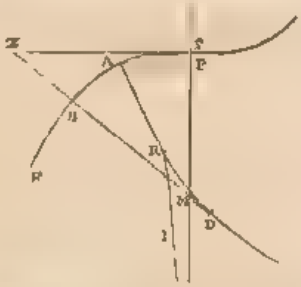


Ad constructionem autem brevissimam hoc pacto hic pervenimus. KT sive KM dicta fuit y. Itaque MH erit $y + \frac{1}{3}x$. Et MH ad HK, sive OB ad BP, ut $y + \frac{1}{3}x$ ad $\frac{1}{3}x$. Sive, sumptis omnium duplis, ut $2y + 3x$ ad $3x$. Deinde quia YK $= 3x$, erit YK ad YK + KT, sive per prædicta, KL ad MN, ut $3x$ ad $3x + y$. Atqui ex rationibus OB ad BP, & KL ad MN, componi diximus rationem BD ad DM. Ergo ratio BD ad DM erit composita ex rationibus $2y + 3x$ ad $3x$, & $3x$ ad $3x + y$, ideoque erit ea quæ $2y + 3x$ ad $3x + y$. & dividendo, ratio BM ad MD, eadem quæ y ad $3x + y$.

Sit SZ perpendicularis ad SK, eique occurrat MB producta in Z.

Quia ergo ratio B M ad M D inventa est ea quæ y ad $y + 3x$, hoc est quæ M K ad M K + 3 K S. Sicut autem M K ad M K + 3 K S, ita M B ad M B + 3 B Z: erit proinde M B ad M D ut M B ad M B + 3 B Z. Vnde liquet M D æqualem sumendam ipsi M B + 3 B Z. Atque ita quotlibet puncta curvæ C D E invenire licebit. Cujus curvæ portio quælibet ut D S, rectæ D B, quæ paraboloidi S A B ad angulos rectos occurrit, æqualis erit. Constat autem geometricam esse, & si velimus, possumus æquatione aliqua relationem exprimere punctorum omnium ipsius ad puncta axis S K. DE CIRCARUM CURVARUM EVOLUTIONE

Simili modo autem, si inquiramus in paraboloide illa sive parabola cubica, in qua cubi ordinatim applicatarum ad axem, sunt inter se sicut portiones axis abscissæ, inveniemus curvam cujus evolutione describitur, quæque proinde rectæ lineæ æquari poterit, nihilo difficiliori constructione per puncta determinari. Nam si fuerit illa S A B; axis S M, (dicitur autem improprie axis in hac curva, cum forma ejus sit ejusmodi, ut ductâ S Z, quæ secet S M ad angulos rectos, ea portiones similes curvæ habeat ad partes oppo-



sitas,) agatur per punctum quodlibet B, in paraboloide sumptum, recta B D, quæ curvam ad angulos rectos secet, axique ejus occurrat in M, rectæ vero S Z in Z. Deinde sumatur F D æqualis dimidiæ B M, una cum sesquialtera B Z. Eritque D unum e punctis curvæ quæsitæ R D vel R I, cujus evolutione, juncta tamen recta quadam R A, describetur paraboloides S A B. Sunt autem hic, quod notatu dignum est, quodque in aliis etiam nonnullis harum paraboloidum contingit, duæ evolutiones in partes contrarias, quarum utraque a puncto certo A initium capit, ita ut evolutione ipsius A R D, in infinitum porro continuata, describatur paraboloidis pars infinita A B F, evolutione autem totius F H K, similiter in infinitum extensæ, tantum particula A S. Punctum autem A definitur, sumptâ S P quæ sit ad

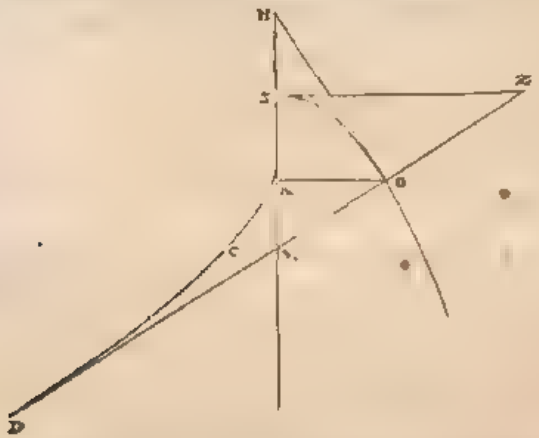
DE SENARIORUM CURVARUM EVOLUTIONE

larus rectum paraboloidis, sicut unitas ad radicem quadrato-quadraticam numeri 91125, (is cubus est ex 45) applicataque ordinatim P A. Vnde porro punctum R, confinium duarum curvarum R D, R I, invenitur sicut cætera omnia harum curvarum, hoc est, sicut punctum D modo inventum fuit.

Denique, quæcunque fuerit ex paraboloidum genere curva S A B, semper æque facile curvam aliam, cujus evolutione ipsa describatur, quæque propterea rectæ adæquari possit, per puncta invenire comperimus. Atque adeo constructionem universalem sequenti tabella exhibemus, quæ quousque libuerit extendi poterit.

$$\text{Si}\left\{\begin{array}{l} ax = y^2 \\ a^2x = y^3 \\ ax^2 = y^3 \\ ax^3 = y^4 \\ a^3x = y^4 \end{array}\right. \quad \text{Erit}\left\{\begin{array}{l} BM + 2BZ \\ BM + 3BZ \\ 2BM + 3BZ \\ 3BM + 4BZ \\ \frac{3}{2}BM + \frac{4}{3}BZ \end{array}\right\} = BD.$$

Sit S B parabola, vel paraboloidum aliqua, cujus vertex S, recta S K vel axis, vel axi perpendicularis, ad quam referuntur æquatione puncta paraboloidis, & ipsa quidem S K semper ad partem cavam ducta intelligitur, cui perpendicularis S Z. Ponendo jam S K = x,



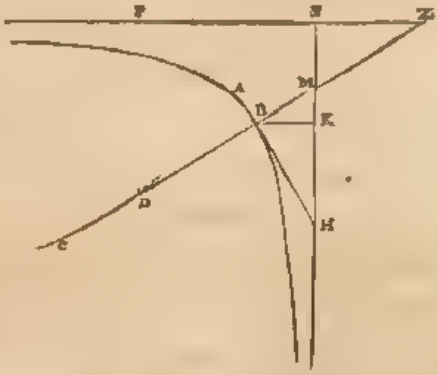
B K = y, quæ à puncto quovis curvæ perpendicularis est ipsi S K; & latere recto curvæ = a, prior pars tabellæ, quæ ad sinistram est, naturam singularum paraboloidum singulis æquationibus explicat. Quibus respondent in parte dextra quantitates lineæ B D, quæ si curvæ S A B insistat ad angulos rectos, exhibitura sit punctum D

in

in curva quæsita C D. Exempli gratia, si S B est parabola quæ ex coni sectione fit, et scimus convenire æquationem tabellæ primam, $ax = y^2$, cui respondet ab altera parte B M + 2 B Z = B D. Unde longitudo lineæ B D cognoscitur, adeoque inventio quotlibet punctorum curvæ C D. Quam quidem, hoc casu, paraboloidem esse supra demonstratum fuit, eam nempe, cujus æquatio tertia est hujus tabellæ. DE LINEARUM CURVARUM EVOLUTIONE

Construitur autem tabella hoc pacto, ut B M sumatur multiplex secundum numerum qui est exponens potestatis x in æquatione, B Z vero, multiplex secundum exponentem potestatis y; ex his autem utrisque compositæ accipiatur pars denominata ab exponente potestatis a.

Præter hasce autem paraboloides lineas, alias item invenimus, à quibus, non absimili constructione, deducuntur curvæ rectis comparabiles. Assimilantur autem hyperbolis, eo quod asymptotos suas habent, sed tantum angulum rectum constituentes. Et horum primam quidem statuimus hyperbolam ipsam, quæ est e coni sectione.



Reliquarum vero naturam ut explicemus; sumto P S, S K, asymptoti curvæ A B, rectum angulum comprehendentes, & à curvæ puncto quolibet B ducatur B K parallela P S, sitque S K = x, K B = y. Si igitur hyperbola sit A B, scimus rectangulum linearum S K, K B, hoc est, rectangulum xy semper eidem quadrato æquale esse, quod vocetur aa.

Proxima vero hyperboloidum erit, in qua solidum ex quadrato

DE RATIONE CURVARUM EVOLUTIONIBUS.

lineæ S K, in altitudinem K B ductam, hoc est, solidum $x \times y$, cubo certo æquabitur, qui vocetur a^3. Atque ita innumeræ aliæ hujus generis hyperboloides existunt, quarum proprietatem sequens tabella singulis æquationibus exhibet, simulque rationem construendi curvam D C, cujus evolutione quæque generetur.

$$\text{Si} \begin{cases} xy = a^2, \\ x^2y = a^3 \\ xy^2 = a^3 \\ x^3y = a^4 \\ xy^3 = a^4 \end{cases} \text{Erit} \begin{cases} \frac{1}{1}BM + \frac{1}{1}BZ \\ \frac{1}{2}BM + \frac{1}{1}BZ \\ \frac{1}{1}BM + \frac{1}{2}BZ \\ \frac{1}{3}BM + \frac{1}{1}BZ \\ \frac{1}{1}BM + \frac{1}{3}BZ \end{cases} = BD$$

Recta D B M Z curvam A B, ut antea quoque, secat ad angulos rectos, occurritque asymptotis S K, S P, in M & Z. Si igitur exempli gratia hyperbola fuerit A B, cujus æquatio est $xy = a^2$, sumetur $BD = \frac{1}{1}BM + \frac{1}{1}BZ$, quemadmodum tabella præcipit Eritque punctum D in curva D C quæsita, cujus alia quotlibet puncta sic invenirí poterunt, & portio ejus quælibet rectæ lineæ adæquari. Et hæc quidem eadem illa est curva, cujus relationem ad axem hyperbolæ superius æquatione expressimus. Constructio autem tabellæ hujus plane eadem est quæ superioris.

Cæterum, quoniam tam ad harum curvarum, tum ad earum quæ ex paraboloidibus nascuntur constructionem, ducenda sunt lineæ D B Z, quæ ad datum punctum B tangent curvas A B, sive spatium tangentes B H, ad angulos rectos, dicemus in universum quomodo hæ tangentes inveniantur. In æquatione itaque, quæ cujusque curvæ naturam explicat, quales æquationes duabus tabellis præcedentibus exponuntur, considerare oportet quæ sint exponentes potestatum x & y, & facere ut, sicut exponens potestatis x ad exponentem potestatis y, ita sit S K ad K H. Juncta enim H B curvam in B continget. Velut in tertia hyperboloide, cujus æquatio est $xy^2 = a^3$: quia exponens potestatis x est 1, potestatis autem y exponens 2; oportet esse ut 1 ad 2 ita S K ad K H. Horum autem demonstrationem noverunt analyticæ artis periti, qui jam pridem omnes has lineas contemplari cœperunt, & non tot in paraboloidum illarum, sed & spatiorum quorundam infinitorum, inter hyperboloides & asymptotos interjectorum, plana totaque dimensi sunt. Quod quidem & nos, facili atque universali methodo, expedire possemus, ex tota tangentium proprietate simpli demonstratione. Sed illa non sunt hujus loci.

HOROLOGII OSCILLATORII

PARS QUARTA.

De centro Oscillationis.

CEntrorum Oscillationis, seu Agitationis, investigationem olim mihi, fere adhuc puero, aliisque multis, doctissimus Mersennus proposuit, celeriore admodum inter illius temporis Geometras problema, prout ex literis ejus ad me datis colligo, nec non ex Cartesii haud pridem editis, quibus ad Mersennianas super his rebus responsum continetur. Postulabat autem centra illa ut invenirem in circuli sectoribus, tam ab angulo quam a medio arcu suspensis, atque in latus agitatis, item in circuli segmentis, & in triangulis, nunc ex vertice, nunc ex media basi pendentibus. Quod eo redit, ut pendulum simplex, hoc est, pondus filo appensum reperiatur ea longitudine, ut oscillationes faciat temporum eorundem ac figuræ istæ, uti dictum est, suspensæ. Simul vero pretium operæ, si forte quæsitis satisfecissem, magnum sane & invidiosum polliceabatur. Sed a nemine id quod desiderabat tunc obtinuit. Nam me quod attinet, cum nihil reperiem quo vel primus aditus ad contemplationem eam pateficeret, veluti a limine repulsus, longiori investigatione tunc quidem abstinui. Qui vero rem tete confecisse sperabant viri insignes, Cartesius, Honoratus Fabrius, aliique, nequaquam scopum attigerunt, nisi in paucis quibusdam facilioribus, sed quorum tamen demonstrationem nullam idoneam, ut mihi videtur, attulerunt. Idque comparatione eorum quæ hic trademus manifestum fore spero, si quis forte quæ ab illis tradita sunt, cum nostris hisce contulerit, quæ quidem & certioribus principiis demonstrata arbitror, & experimentis prorsus convenientia reperi. Occasio vero ad hæc denuo tentanda, ex pendulorum automati nostri temperandorum ratione oblata est, dum pondus mobile, præter id quod in imo est, illis applico, ut in descriptione horologii fuit explicatum. Hinc melioribus auspiciis atque à prima origine rem exortis, tandem difficultates omnes superavi, nec tantum problematum Mersennianorum solutionem, sed alia quoque illis difficiliora reperi, &

De centro Oscillationis

viam denique, qua in lineis, superficiebus, solidisque corporibus certa ratione centrum illud investigare liceret. Vnde quidem, præter voluptatem inveniendi quæ multum ab aliis quæsita fuerant, cognoscendique in his rebus naturæ leges decretaque, utilitatem quoque eam cepi, cujus gratia primo animum ad hæc applicueram, reperta illa horologii temperandi ratione facili & expedita. Accessit autem hoc quoque, quod plaris faciendum arbitror, ut certæ, sæculisque omnibus duraturæ, mensuræ definitionem absolutissimam per hæc tradere possem, qualis est ea quæ ad finem horum adjecta reperietur.

DEFINITIONES.

I.

Pendulum dicatur figura quælibet gravitate prædita, sive linea fuerit, sive superficies, sive solidum, ita suspensa ut circa punctum aliquod, vel axem potius, qui plano horizontis parallelus intelligitur, motum reciprocum vi gravitatis sua continuare possit.

II.

Axis ille horizontis plano parallelus, circa quem penduli motus fieri intelligitur, dicatur axis Oscillationis.

III.

Pendulum simplex dicatur quod filo vel linea inflexili, gravitatis experte, constare intelligitur, ima sui parte pondus affixum gerente; cujus ponderis gravitas, velut in unum punctum collecta, censenda est.

IV.

Pendulum verò compositum, quod pluribus ponderibus constat, immutabiles distantias servantibus, tum inter se, tum ab axe Oscillationis. Hinc figura qualibet suspensa, ac gravitate prædita, pendulum compositum dici potest, quatenus cogitatu in partes quotlibet est divisibilis.

V.

Pendula isochrona vocentur, quorum Oscillationes, per arcus similes, æqualibus temporibus peraguntur.

VI.

Planum Oscillationis dicatur illud, quod per centrum gravitatis figuræ suspensæ ductæ intelligitur, ad axem oscillationis rectum. De centro Oscillationis.

VII.

Linea centri, recta quæ per centrum gravitatis figuræ ducitur, ad axem oscillationis perpendicularis.

VIII.

Linea perpendiculi, recta in plano oscillationis, ducta ab axe oscillationis, ad horizontis planum perpendicularis.

IX.

Centrum oscillationis vel agitationis figuræ cujuslibet, dicatur punctum in linea centri, tantum ab axe oscillationis distans, quanta est longitudo penduli simplicis quod figuræ isochronum sit.

X.

Axis gravitatis, linea quævis recta, per centrum gravitatis figuræ transiens.

XI.

Figura plana, vel linea in plano sita, in planum agitari dicatur, cum axis oscillationis in eodem cum figura lineave est plano.

XII.

Eadem vero in latus agitari dicantur, cum axis oscillationis ad figuræ lineave planum rectus est.

XIII.

Quando pondera in rectas lineas duci dicentur, id ita est intelligendum, ac si numeri lineæve, quantitates ponderum rationemque inter se mutuam exprimentes, ita ducantur.

HYPOTHESES.

I

SI pondera quotlibet, vi gravitatis suæ, moveri incipiant; non posse centrum gravitatis ex ipsis composita altius, quam ubi incipiente motu reperiebatur, ascendere.

De centro Oscillationis.

Altitudo autem in his secundum distantiam à plano horizontali consideratur, graviaque ponuntur ad hoc planum, secundum rectas ipsi perpendiculares, descendere conari. Quod idem ab omnibus, qui de centro gravitatis egerunt, vel ponitur expresse, vel à legentibus supplendum est, cum absque eo centri gravitatis consideratio locum non habeat.

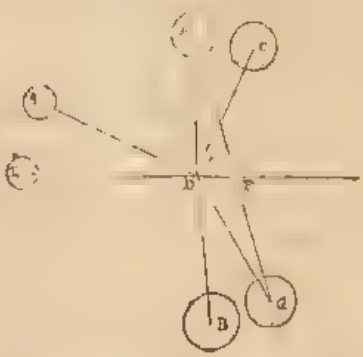
Ipsa vero hypothesis nostra quominus scrupulum moveat, nihil aliud sibi velle eam ostendemus, quam quod nemo unquam negavit, gravia nempe sursum non ferri. Nam primo, si unum quodpiam corpus grave proponamus, illud vi gravitatis suæ altius ascendere non posse extra dubium est: ascendere autem tunc intelligitur scilicet, cum ejus centrum gravitatis ascendit. Sed & idem de quotlibet ponderibus, inter se per lineas inflexiles conjunctis, concedi necesse est, quoniam nihil vetat ipsa tanquam unum aliquod considerari. Itaque neque horum commune gravitatis centrum ultro ascendere poterit.

Quod si jam pondera quotlibet non inter se connexa ponantur, illorum quoque aliquod commune centrum gravitatis esse scimus. Cujus quidem centri quanta erit altitudo, tantam ipso & gravitatis ex omnibus compositæ altitudinem censeri debere, siquidem omnia ad eandem illam centri gravitatis altitudinem deduci possunt, nulla alia accersita potentiâ quam quæ ipsis ponderibus inest, sed tantum lineis inflexibilibus ea prolubitu conjungendo, ac circa gravitatis centrum movendo, ad quod nulla vi neque potentia determinata opus est. Quare, sicut fieri non potest ut pondera quædam, in plano eodem horizontali posita, supra illud planum, vi gravitatis suæ, omnia æqualiter attollantur, ita nec quorumlibet ponderum, quomodocunque dispositorum, centrum gravitatis ad majorem quam habet altitudinem pervenire poterit. Quod autem diximus pondera quælibet, nulla adhibita vi, ad planum horizontale, per centrum commune gravitatis eorum transiens, perduci posse, sic ostendetur.

Sint pondera A, B, C, positione data, quorum commune gravitatis centrum sit D, per quod planum horizontale ductum ponatur, cujus sectio recta E F. Sint jam lineæ inflexiles D A, D B, D C, quæ pondera sibi invariabiliter connectant, quæ porro moveantur, donec A sit in plano E F ad E. Virgis vero omnibus per æquales angulos delatis, erunt jam B in G, & C in H.

Rursus jam B & C connecti intelligantur virgâ H G, quæ secet planum E F in F, ubi necessario quoque erit centrum gravitatis bino-

rum istorum ponderum connexorum, cum trium, in E, B, H, positorum, centrum gravitatis sit D, & ejus quod est in B, centrum gravitatis sit quoque in plano E D F. Moventur igitur rursus pondera H, G, super puncto F, velut axe, absque vi ulla, ac simul utraque ad planum F Z adducuntur, adeo ut jam tria, quæ prius erant in A, B, C, ad ipsam sui centri gravitatis D altitudinem, suo ipsorum æquilibrio, translata appareat. quod erat ostendendum. Eadem que de quotcunque alis est demonstratio. De centro Oscillationis



Hæc autem hypothesis nostra ad liquida etiam corpora valet, ac per eam non solum omnia illa, quæ de innatantibus habet Archimedes, demonstrari possunt, sed & alia pleraque Mechanicæ theoremata. Et sane, si hac eadem uti scirent novorum operum machinatores, qui motum perpetuum irrito conatu moliuntur, facile suos ipsi errores deprehenderent, intelligerentque rem eam mechanica ratione haud quaquam possibilem esse.

II.

Remoto aeris, alioque omni impedimento manifesto, quemadmodum in sequentibus demonstrationibus id intelligi volumus, centrum gravitatis pendulæ agitatæ, æquales arcus descendendo ac ascendendo percurrere.

De pendulo simplici hoc demonstratum est propositione 9 de Descensu gravium. Idem vero & de composito tenendum esse declarat experientia, si quidem, quæcunque fuerit penduli figura,

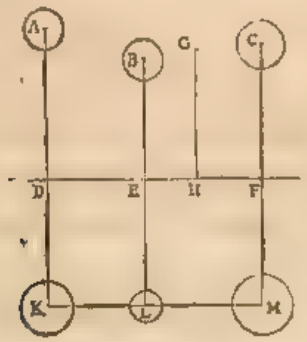
De centro Oscillationis

æque apta continuando motui reperitur, nisi in quantum plus minusve aëris objectu impeditur.

PROPOSITIO I.

Ponderibus quotlibet ad eandem partem plani existentibus, si à singulorum centris gravitatis agantur in planum illud perpendiculares; hæ singulæ in sua pondera ductæ, tantundem simul efficient, ac perpendicularis, à centro gravitatis ponderum omnium in planum idem cadens, ducta in pondera omnia.

Sint pondera A, B, C, sita ad eandem partem plani, cujus sectio recta D F, inque ipsum à singulis ponderibus ducantur perpendiculares A D, B E, C F. Sit autem G punctum centrum gravitatis ponderum omnium A, B, C, à quo ducatur perpendicularis in idem planum G H. Dico summam productorum, quæ fiunt a singulis ponderibus in suas perpendiculares, æquari producto ab recta G H in omnia pondera A, B, C.



Intelligantur enim perpendiculares, a singulis ponderibus eductæ, continuari in lateram partem plani D F, sintque singulæ D K, E L, F M, ipsi H G æquales; omnesque lineæ, inflexiles virgas referant, ad horizontem parallelas, & ponantur in K, L, M, gravitates ejusmodi, quæ singulæ cum sibi oppositis A, B, C, æquilibrium faciant ad intersectionem plani D E F. Omnes igitur K, L, M, æquiponderabunt omnibus A, B, C. Erit autem, sicut longitudo A D ad D K, ita pondus K ad pondus A, ac proinde D A ducta in magnitudinem A, æquabitur D K, sive G H, ductæ in K. Similiter

ter E B in B æquabitur E I, sive G H, in I; & F C in C æquabitur F M, sive G H, in M. Ergo summa productorum ex A D in A, B E in B, C F in F, æquabitur summæ productorum ex G H in omnes K, L, M. Quum autem K, L, M, æquiponderent ipsis A, B, C, etiam iisdem A, B, C, ex centro ipsorum gravitatis G suspensis, æquiponderabunt. Vnde, cum distantia G H æqualis sit singulis D K, E L, F M, necesse est magnitudines A, B, C, simul sumptas, æquari ipsis K, L, M. Itaque & summa productorum ex G H in omnes A, B, C, æquabitur productis ex D A in A, E B in B, & F C in C. quod erat demonstrandum. De centro oscillationis

Etsi vero in demonstratione positæ fuerint rectæ A D, G H, C F, horizonti parallelæ, & planum ad horizontem erectum, patet, si omnia simul in alium quemlibet situm transponantur, eandem manere productorum æqualitatem, cum rectæ omnes sint eædem quæ prius. Quare constat propositum.

PROPOSITIO II.

Positis quæ prius, si pondera omnia A, B, C, *sint æqualia; dico summam omnium perpendicularium* A D, B E, C F, *æquari perpendiculari, à centro gravitatis ductæ,* G H, *multiplici secundum ponderum numerum.*

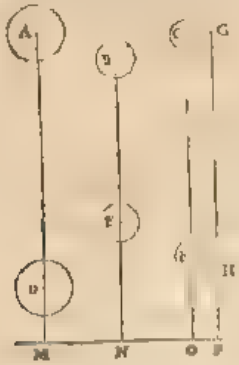
Quum enim summa productorum, à ponderibus singulis in suas perpendiculares, æquetur producto ex G H in pondera omnia, sitque hic, propter ponderum æqualitatem, summa illa productorum æqualis producto ex uno pondere in summam omnium perpendicularium, iremque productum ex G H in pondera omnia, idem quod productum ex pondere uno in G H, multiplicem secundum ponderum numerum: patet summam perpendicularium necessario jam æquari ipsi G H, multiplici secundum ponderum numerum, quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO III.

Si magnitudines quædam descendant omnes, vel ascendant, licet inæqualibus intervallis, altitudines descensus vel ascensus cujusque, in ipsam magnitudinem ductæ, efficient summam productorum æqualem ei, quæ fit ex altitudine descensus vel ascensus centri gravitatis omnium magnitudinum, ducta in omnes magnitudines.

De centro Oscillationis.

Sunto magnitudines A, B, C, quæ ex A, B, C, descendant in D, E, F, vel ex D, E, F, ascendant in A, B, C. Sitque earum centrum gravitatis omnium, dum sunt in A, B, C, eadem altitudine cum puncto G; cum vero sunt in D, E, F, eadem altitudine cum puncto H. Dico summam productorum ex altitudine A D in A, B E in B, C F in C, æquari producto ex G H in omnes A, B, C.



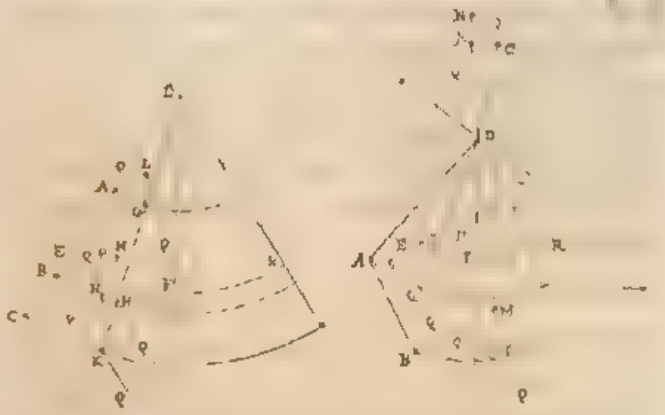
Intelligatur enim planum horizontale cujus sectio recta M P, atque in ipsum incidant productæ A D, B E, C F & G H, in M, N, O, P. Quia igitur summa productorum ex A M in A, B N in B, C O in C, æqualis est facto ex G P in omnes A, B, C *. Similiterque summa productorum ex D M in A, E N in B, F O in C, æqualis facto ex H P in omnes A, B, C, sequitur & excessum priorum productorum supra posteriora, æquari facto ex G H in omnes magnitudines A, B, C. Dictum vero excessum æquari manifestum est productis ex A D in A, B E in B, C F in C. Ergo hæc simul etiam æqualia erunt producto ex G H in omnes A, B, C. quod erat demonstrandum.

* Prop. 1 hujus.

PROPOSITIO IV.

Si pendulum è pluribus ponderibus compositum, atque è quiete dimissum, partem quamcunque oscillationis integre confecerit, atque inde porro intelligantur pondera ejus singula, relicto communi vinculo, celeritates acquisitas sursum convertere, ac quousque possunt ascendere; hoc facto, centrum gravitatis ex omnibus compositæ, ad eandem altitudinem reversum erit, quam ante inceptam oscillationem obtinebat.

Sit pendulum compositum ex ponderibus quotlibet A, B, C, virgæ, vel superficiei pondere carenti, inhærentibus. Sitque suspensum ab axe per D punctum ducto, qui ad planum, quod hic conspicitur, perpendicularis intelligatur. In quo eodem plano etiam centrum gravitatis E, ponderum A, B, C, positum sit: lineaque centri D E, inclinetur ad lineam perpendiculi D F, angulo E D F attracto, nimirum, eo usque pendulo. Hinc vero dimitti jam ponatur, ac partem quamlibet oscillationis conficere, ita ut pondera A, B, C, perveniant in G, H, K. Vnde, relicto deinceps communi vinculo, singula intelligantur acquisitas celeritates sursum convertere, (quod impingendo in plana quædam inclinata, velut Q Q, fieri potest,) & quousque possunt ascendere, nempe in I, M, N. Quo ubi pervenerint, sit centrum gravitatis omnium punctum P. Dico hoc pari altitudine esse cum puncto E. De centro Oscillationis.



Nam primum quidem, constat P non altius esse quam E, ex prima sumptarum hypothesium. Sed nec humilius fore sic ostendemus. Si enim, si potest, P humilius quam E, & intelligantur pondera ex illdem, ad quas ascenderunt, altitudinibus recidere, quæ sunt I G, M H, N K. Vnde quidem easdem celeritates ipsis acquiri constat, quas habebant ad ascendendum ad istas altitudines*, hoc est, eas ipsas quas acquisierant motu pendulo ex C B A D in K H G D. Quare, si cum dictis celeritatibus ad virgam superficiemve, cui innexi fuere, nunc referantur, eique simul adhærescant, motumque secundum inceptos arcus continuent, quod fiet, si prius quam virgam attingant, à planis inclinatis Q Q repercussa intelli- * Propos. 4. part. 1.

De centro Oscillationis.

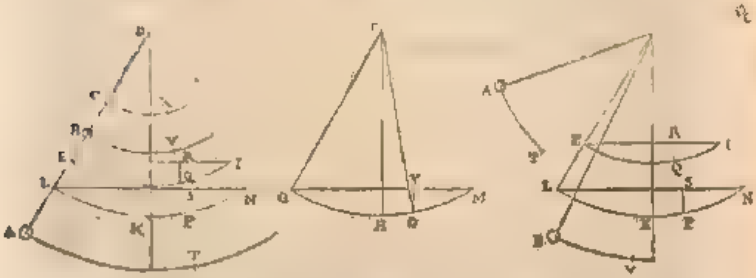
gantur; absolvet, hoc modo restitutum pendulum, oscillationis partem reliquam, æque ac si absque ulla interruptione motum continuasset. Ita ut centrum gravitatis penduli, E, arcus æquales E F, F R, descendendo ac ascendendo percurrat, ac proinde in R eadem ac in E altitudine reperiatur. Ponebatur autem E esse altius quam P centrum gravitatis ponderum in L, M, N, positorum. Ergo & R altius erit quam P: adeoque ponderum ex L, M, N, delapsorum centrum gravitatis, altius, quam unde descenderat, ascendisset. quod est absurdum *. Non igitur centrum gravitatis P humilius est quam E. Sed nec altius erat. Ergo æque altum sit necesse est. quod erat demonstrandum.

* Hypoth. I hu.

PROPOSITIO V.

Dato pendulo ex ponderibus quotlibet composito, si singula ducantur in quadrata distantiarum suarum ab axe oscillationis, & summa productorum dividatur per id quod fit ducendo ponderum summam, in distantiam centri gravitatis communis omnium ab eodem axe oscillationis; orietur longitudo pendulii simplicis composito isochroni, sive distantia inter axem & centrum oscillationis ipsius penduli compositi.

Sint pondera pendulum componentia, (quorum nec figura nec magnitudo, sed gravitas tantum consideretur), A, B, C, suspensa



ab axe, qui per punctum D, ad planum quod conspicitur, rectus intelligitur. In quo plano sit quoque eorum centrum commune gravitatis E; nam pondera in diversis esse nihil refert. Distantia puncti E ab axe, nempe recta E D, vocetur *d*. Item ponderis A distantia A D, sit *e*; B D, *f*; C D, *g*. Ducendo itaque singula pondera in qua-

drata ſiarum diſtantiarum, erit productorum ſumma $aee + bff + cgg$. Et rurſus, ducendo ſummam ponderum in diſtantiam centri gravitatis omnium, productum æquale erit $ad + bd + cd$*. Vnde, productum prius per hoc dividendo, habebitur $\frac{aee + bff + cgg}{ad + bd + cd}$. Cui longitudini ſi æqualis ſtatuatur longitudo penduli ſimplicis F G, quæ etiam x vocabitur, dico hoc illi compoſito iſochronum eſſe. De centro Oſcillationis Prop. 1 huj.

Ponantur enim tum pendulum F G, tum linea centri D E, æqualibus angulis a linea perpendiculi remota, illud ab F H, hæc ab D K, atque inde dimiſſa librari, & in recta D E ſumatur D L æqualis F G. Itaque pondus G penduli F G, integra oſcillatione arcum G M percurret, quem linea perpendiculi F H medium ſecabit, punctum vero L arcum ſibi ſimilem & æqualem L N, quem medium dividet D K. Itemque centrum gravitatis E, percurret ſimilem arcum E I. Quod ſi in arcubus G M, N L, ſumptis punctis quibuſlibet, ſimiliter ipſos dividentibus, ut O & P, eadem celeritas eſſe oſtendatur ponderis G in O, & puncti L in P, conſtabit inde æqualibus temporibus utroſque arcus percurri, ac proinde pendulum F G, pendulo compoſito ex A, B, C, iſochronum eſſe. Oſtenderur autem hoc modo.

Sit primo, ſi poteſt, major celeritas puncti L, ubi in P pervenit, quam ponderis G in O. Condat autem, dum punctum L percurrit arcum L P, ſimul centrum gravitatis E percurrere arcum ſimilem E Q. Ducantur a punctis Q, P, O, perpendiculares ſurſum, quæ occurrant labentis arcuum E I, L N, G M, in R, S, Y & S P vocetur y. Vnde, cum ſit ut L D, x, ad E D, d, ita S P, y, ad R Q, erit R Q æqualis $\frac{dy}{x}$. Iam quia pondus G eam celeritatem habet in O, qua valet ad eundem unde deſcendit altitudinem aſcendere, nempe per arcum O M, vel perpendicularem O Y ipſi P S æqualem, punctum igitur L, ubi in P pervenerit, majorem ibi celeritatem habebit, quam qua aſcenditur ad altitudinem P S. Dum vero L tranſit in P, ſimul pondera A, B, C, ſumes arcus percurrunt ipſi L P, nimirum A T, B V, C X. Itaque puncti L celeritas in P, ad celeritatem ponderis A in T, quam vinculo eodem continentur, ſicut diſtantia D L ad D A. Sed ut quadratum celeritatis puncti L, quam habet in P, ad quadratum celeritatis puncti A in T, ita eſt altitudo ad quam illa celeritate aſcendi poteſt, ad altitudinem quo hac celeritate aſcendi poteſt* Ergo etiam, ut quadratum diſtantiæ D L, quod eſt xx, ad quadratum diſtantiæ D A, quod eſt ee, ita eſt altitudo quo aſcenditur celeritate puncti L, quam eſt in P, (quæ altitudo major dicta eſt quam P S ſive y, ad altitudinem quo aſcenditur celeritate ponderis A in T, ſi nempe poſtquam in T pervenit, relicto pendulo, * Prop. 8 & 9 Part. 1.

De centro Oscillationis

seorsim motum suum sursum converteret. Quæ proinde altitudo major erit quam $\frac{ccy}{aa}$.

Eadem ratione, erit altitudo ad quam ascenderet pondus B, celeritate acquisita per arcum B V, minor quam $\frac{bbz}{cc}$. Et altitudo ad quam ascenderet pondus C, celeritate acquisita per arcum C X, major quam $\frac{ddx}{bb}$. Vnde, ductis singulis altitudinibus istis in sua pondera, erit summa productorum major quam $\frac{accy}{aa} + \frac{bbz}{cc} + \frac{ddx}{bb}$, quæ proinde major quoque probatur quam $\frac{aay}{a} + \frac{bbz}{b} + \frac{ddx}{d}$. Nam quia posita est longitudo x æqualis $\frac{aay}{a} + \frac{bbz}{b} + \frac{ccx}{c}$, erit $a\,dx + b\,dx + c\,dx$ æquale $a\,ee + b\,ff + c\,g\,g$. Et ductis omnibus in y, & dividendo per $x\,x$, erit $\frac{aay}{a} + \frac{bbz}{b} + \frac{ccx}{c}$ æquale $\frac{aaeey + bbffz + ccggx}{xx}$. Vnde quod dictum est consequitur. Est autem summa ista productorum æqualis ei, quod fit ducendo altitudinem, ad quam ascendit centrum gravitatis commune ponderum A, B, C, in summam ipsorum ponderum, $a + b + c$, si nempe singula, uti dictum, seorsim quoque possint moveantur. Quantitas vero $\frac{aaeey + bbffz + ccggx}{xx}$ producitur ex descensu centri gravitatis eorundem ponderum, qui descensus est R Q, sive $\frac{ee}{x}$, ut supra inventum fuit,) in eandem quoque ponderum summam $a + b + c$. Ergo quum prius productum a tero hoc majus ostensum fuerit, sequitur ascensum centri gravitatis ponderum A, B, C, si, relicto pendulo ubi pervenere in T, V, X, singulas celeritates acquisitas sursum convertant, majorem fore ejusdem centri gravitatis descensu, dum ex A, B, C, moventur in T, V, X. quod est absurdum, cum dictus ascensus descensui æqualis esse debeat, per antecedentem.

Eodem modo, si dicatur celeritatem puncti L, ubi pervenerit in P, minorem esse celeritate ponderis C quum in O pervenerit; ostendemus ascensum possibilem centri gravitatis ponderum A, B, C, minorem esse quam descensum, quod eidem propositioni antecedenti repugnat. Quare relinquitur ut eadem sit celeritas puncti L, ad P translati, quæ ponderis C in O. Vnde, ut superius dictum, sequitur pendulum simplex P C composito ex A, B, C, isochronum esse.

PROPOSITIO VI.

Dato pendulo ex quotcunque ponderibus æqualibus composito; si summa quadratorum factorum à distantiis, quibus unumquodque pondus abest ab axe oscillationis, ap-

plicetur ad distantiam centri gravitatis communis ab eodem oscillationis axe, multiplicem secundum ipsorum ponderum numerum, orietur longitudo penduli simplicis composito isochroni. DE CENTRO OSCILLATIONIS

Sint posita eadem quæ prius, sed pondera omnia inter se æqualia intelligantur, & singula dicantur *a*. Rursus vero nulla eorum magnitudo consideretur, sed pro minimis habeantur, quantum ad extensionem.

Itaque penduli simplicis isochroni longitudo, per propositionem antecedentem, erit [illegible]. Vel, quia quantitas divisa ac dividens utraque per *a* dividitur, fiet nunc eadem longitudo, [illegible]. Quo significatur summa quadratorum a distantiis ponderum ab axe oscillationis, applicata ad distantiam centri gravitatis omnium ab eodem oscillationis axe, multiplicem secundum numerum ipsorum ponderum, qui hic est 3. facile enim perspicitur numerum hunc, in quem ducitur distantia *d*, respondere necessario ipsi ponderum numero. Quare constat propositum.

Quod si pondera æqualia in unam lineam rectam conjuncta sint, atque ex termino ejus superiore suspensa, constat distantiam centri gravitatis, ex omnibus compositæ, ab axe oscillationis, multiplicem secundum ponderum numerum, æquari summæ distantiarum omnium ponderum ab eodem oscillationis axe *, ac proinde, hoc casu, habebitur quoque longitudo penduli simplicis, composito isochroni, si summa quadratorum a distantiis ponderum singulorum ab axe oscillationis, dividatur per summam earundem omnium distantiarum. * Prop. 3. huj.

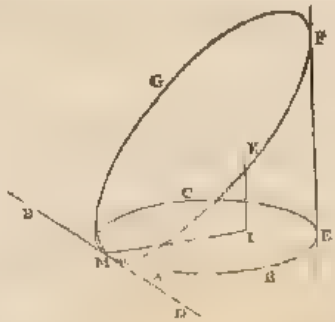
DEFINITIO XIV.

SI fuerint in eodem plano, figura quædam, & linea recta quæ ipsam extrinsecus tangat; & per ambitum figuræ alia recta, plano ejus perpendicularis, circumferatur, superficiemque quandam describat, quæ deinde secetur plano per dictam tangentem ducto & ad dictæ figuræ planum inclinato, solidum comprehensum à duobus planis istis, & parte superficiei descriptæ, inter utrumque planum intercepta, vocetur Cuneus super figura illa, tanquam basi, abscissus.

In schemate adjecto, est A B E C figura data, recta eam tangens

De centro oscillationis

M D; quæ vero per ambitum ejus circumfertur, E F, cuneus au-



tem figura solida planis A B E C, M F G, & parte superficiei, à recta E F descriptæ, comprehensa.

DEFINITIO XV.

Distantia inter rectam, per quam cuneus abscissus est, & punctum baseos, in quod perpendicularis cadit à cunei centro gravitatis, dicatur cunei subcentrica. Nempe in figura eadem, si K sit centrum gravitatis cunei, recta vero K I ad basin ejus A D E C perpendicularis ducta sit, & rursus I M perpendicularis ad A D; erit I M, quam subcentricam dicimus.

PROPOSITIO VII.

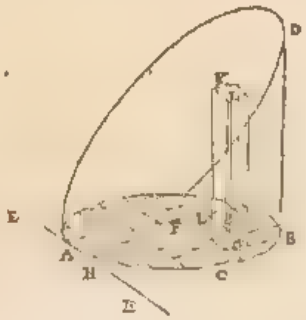
Cuneus super plana figura qualibet abscissus, plano inclinato ad angulum semirectum, æqualis est solido, quod fit ducendo figuram eandem, in altitudinem æqualem distantiæ centri gravitatis figuræ, ab recta per quam abscissus est cuneus.

Sit, super figura plana A C B, cuneus A B D abscissus plano ad angulum semirectum inclinato, ac transeunte per B E, rectam tangentem figuram A C B, inque eius plano sitam. Centrum vero gravitatis figuræ sit F, unde in rectam B E ducta sit perpendicularis F A. Dico cuneum A C B æqualem esse solido, quod fit ducendo figuram A C B in altitudinem ipsi F A æqualem.

Intelligatur enim figura A C B divisa in particulas minimas æqua-

les

les quarum una G. Itaque constat, si harum singulæ ducantur in distantiam suam ab recta E E, summam productorum fore æqualem ei quod fit ducendo rectam A F in particulas omnes *, hoc est, ei quod fit ducendo figuram ipsam A C B, in altitudinem æqualem A F. Atqui particulæ singulæ ut G, in distantias suas G H ductæ, æquales sunt parallelepipedis, vel prismatibus minimis, super ipsas erectis, atque ad superficiem obliquam A D terminatis, quale est G K, quia horum altitudines ipsis distantiis G H æquantur, propter angulum semirectum inclinationis planorum A D & A C B. Patetque ex his parallelepipedis totum cuneum A B D componi. Ergo & cuneus ipse æquabitur solido super basi A C B, altitudinem habenti rectæ F A æqualem. quod erat demonstrandum.



PROPOSITIO VIII.

Si figuram planam linea recta tangat, divisaque intelligatur figura in particulas minimas æquales, atque a singulis ad rectam illam perpendiculares ductæ erunt omnium harum quadrata, simul sumpta, æqualia rectangulo cuidam, multiplici secundum ipsarum particularum numerum; quod nempe rectangulum fit a distantia centri gravitatis figura ab eadem recta, & à subcentrica cunei, qui per illam super figura abscinditur.

Positis enim cæteris omnibus quæ in constructione præcedenti, sit I A cuneus A B D subcentrica in recta E E. Oportet igitur ostendere, summam quadratorum omnium à distantiis particularum

De centro Oscillationis

figuræ A C B æquari rectangulo ab F A, L A, multiplici secundum particularum numerum.

Et constat quidem ex demonstratione præcedenti, altitudines parallelepipedorum singulorum, ut G K, æquales esse distantiis particularum, quæ ipsorum bases sunt, ut G, ab recta A B. Quare, si jam parallelepipedum G K ducamus in distantiam G H, perinde est ac si particula G ducatur in quadratum distantiæ G H. Idemque modo res habet in reliquis omnibus. Atqui producta omnia parallelepipedorum in distantias suas ab recta A B, æquantur simul producto ex cuneo A B D in distantiam L A*, quia cuneus gravitat super puncto L. Ergo etiam summa productorum à particulis singulis G, in quadrata suarum distantiarum ab recta A B, æquabitur producto ex cuneo A B D in rectam L A, hoc est, producto ex figura A C B in rectangulum ab F A, L A. Nam cuneus A B D, æqualis est producto ex figura A C B in rectam F A* Rursus quia figura A C B æqualis est producto ex particula una G, in numerum ipsarum particularum, sequitur, dictum productum ex figura A C B in rectangulum ab F A, L A, æquari producto ex particula G in rectangulum ab F A, L A, multiplici secundum numerum particularum G. Cui proinde etiam æqualis erit dicta summa productorum, a particulis singulis G in quadrata suarum distantiarum ab recta A B, sive a particula una G in summam omnium horum quadratorum. Quare, omissa utrinque multiplicatione in particulam G, necesse est summam earundem quadratorum æquari rectangulo ab F A, L A, multiplici secundum numerum particularum in quas figura A C B divisa intelligitur. quod erat demonstrandum.

* Prop. 1. hujus

* Prop. præced.

PROPOSITIO IX.

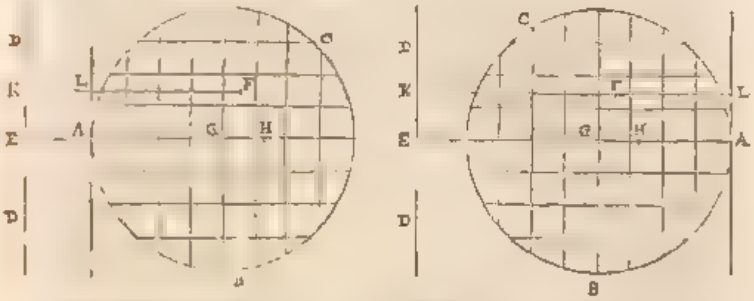
Datâ figurâ planâ & in eodem plano lineâ rectâ, quæ vel secet figuram vel non, ad quam perpendiculares cadant à particulis singulis minimis & æqualibus, in quas figura divisa intelligitur, invenire summam quadratorum ab omnibus istis perpendicularibus; sive planum, cujus multiplex, secundum particularum numerum, dicta quadratorum summa æquale sit.

Sit data figura plana A B C, & in eodem plano recta B D, divisaque figura cogitatu in particulas minimas æquales, intelligantur ab unaquaque earum perpendiculares ductæ in rectam B D, sicut à particula Z ducta est Z K. Oporteatque invenire

summam quadratorum ab omnibus istis perpendicularibus.

Sit datæ E D parallela recta A L, quæ figuram tangat, ac tota extra eam posita sit. Potest autem figuram vel ab eadem parte ex qua est E D, vel a parte opposita contingere. Distantia vero centri gravitatis figuræ ab recta A I sit recta G A, secans E D in E & subcentrica cuiet, super figura abscissi plano per rectam A I, sit H A. Dico summam quadratorum quæsitam æquari rectangulo A G H una cum quadrato E G, multiplicibus secundum particularum numerum, in quas figura divisa intelligitur.

Di centro oscillationis



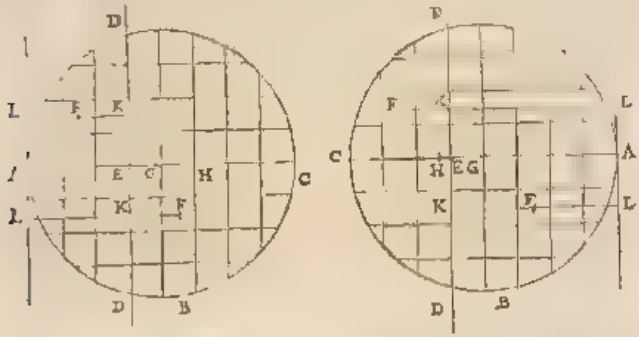
Occurrat enim F K, si opus est producta, tangenti A I in L puncto. Itaque primum, eo casu quo recta E D a figura distat, & tangens A I ad eandem figuræ partem ducta est, sic propositum ostendetur. Summa omnium quadratorum F K æquatur totidem quadratis K I, una cum bis totidem rectangulis K L F, & totidem insuper quadratis L F. Sed quadrata K I æquantur totidem quadratis E A. Et rectangula K L F æqualia esse constat totidem rectangulis E A G, quia omnes F L æquales totidem G A *. Et denique quadrata L F æquantur totidem rectangulis H A G *, hoc est, totidem quadratis A G cum totidem rectangulis A G H. Ergo quadrata omnia F K æqualia erunt totidem quadratis E A, cum totidem duplis rectangulis E A G, atque insuper totidem quadratis A G cum totidem rectangulis A G H. Atqui tria ista, nempe quadratum E A cum duplo rectangulo E A G & quadrato A G, faciunt quadratum E G. Ergo apparet quadrata omnia F K æquari totidem quadratis E G, una cum totidem rectangulis A G H. Quod erat ostendendum.

* Prop. 2 hujus.
* Prop. proxima.

Porro in reliquis omnibus casibus, quadrata omnia F K æquantur totidem quadratis K I, minus bis totidem rectangulis K L F, plus totidem quadratis L F, hoc est, totidem quadratis F A, minus totidem duplis rectangulis E A G, plus totidem quadratis A G, cum to-

De centro Oscillationis

dem rectangulis A G H. Atqui, omnibus hisce casibus, fit quadratum E A, plus quadrato A G, minus duplo rectangulo E A G, æquale quadrato E G. Ergo rursus quadrata omnia F K æqualia erunt totidem quadratis E G, una cum totidem rectangulis A G H. Quare constat propositum.

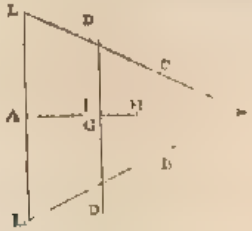


Hinc sequitur, rectangulum A G H eadem magnitudine esse, utriusvis cuneiſ ſubcentrica fuerit A H, hoc eſt, ſive per hanc, ſive per illam tangentium parallelarum A I abſciſſi. Itaque A G unius caſus ad A G alterius, ut H G hujus ad H G alterius. Sicut autem rectæ A G inter ſe, ita in utroque caſu cunei per A I abſciſſi, ut colligitur ex prop. 7 huj. Ergo ita quoque reciproce G H ad G H.

Apparet etiam, dato figuræ planæ centro gravitatis G, & ſubcentrica cunei, per alterutram tangentium parallelarum A I abſciſſi, dari quoque cunei, per tangentem alteram A I abſciſſi, ſubcentricam.

PROPOSITIO X.

Positis quæ in propositione præcedenti; si data recta E D *transeat per* G, *centrum gravitatis figuræ* A B C, *erit summa quadratorum à distantiis particularum, in quas figura*



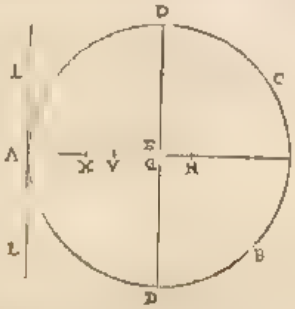
divisa intelligitur, ab recta E D, *æqualis rectangulo solis* A G H, *multiplici secundum ipsarum particularum numerum.*

Hoc enim manifestum est, quem nullam tunc sit quadratum F G.

PROPOSITIO XI.

Positis rursus cæteris ut in præcedentium penultima; si D E *sit axis figuræ planæ* A B C, *in duas æquales similesque portiones eam dividens, sitque insuper* V G *distantia centri gravitatis dimidiæ figuræ* D A D *ab recta* E D, *cunei vero, super ipsam abscissi per ipsam* E D, *subcentrica* G X; *erit rectangulum* X G V *æquale rectangulo* A G H.

Sit enim rectangulum X G V, multiplex secundum numerum particularum figuræ D A D, æquale quadratis omnibus perpendicularium a particulis ejusdem figuræ dimidiæ in rectam E D cadentium* Ac proinde idem rectangulum X G V, multiplex secun-



dum numerum particularum totius figuræ A B C, æquale erit quadratis perpendicularium, ab omnibus particulis figuræ hujus in rectam E D demissarum, hoc est, rectangulo A G H multiplici secundum eundem particularum numerum, ut constat ex propos. præcedenti. Vnde sequitur rectangula X G V, A G H inter se æqualia esse. quod erat demonstrandum.

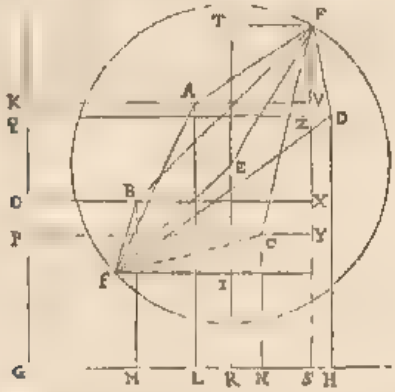
PROPOSITIO XII.

Datis in plano punctis quotlibet; si ex centro gravitatis eorum circulus quilibet describatur; ducantur autem ab omnibus datis punctis, ad punctum aliquod in circuli illius

De centro Oscillationis

circumferentia linea recta, erit summa quadratorum ab omnibus semper eidem plano æqualis.

Sint data puncta A B C D · centrumque gravitatis eorum, sive magnitudinum æqualium ab ipsis suspentarum, sit E; & centro E describatur circulus quilibet F*f*, in cujus circumferentia sumpto puncto aliquo, ut F, ducantur ad id, à datis punctis, rectæ A F, B F, C F, D F. Dico earum omnium quadrata, simul sumpta, æqualia esse plano cuidam dato, semperque eidem, ubicunque in circumferentia punctum F sumptum fuerit.



Ducantur enim rectæ G H, G K, angulum rectum constituentes, & quarum unicuique omnia data puncta sint posita ad eandem partem. Et à singulis in utramque harum perpendiculares agantur A L, A K; B M, B O, C N, C P; D H, D Q. A centro autem gravitatis E, & a puncto F, in alterutram duarum, G H vel G K, perpendiculares E R, F S. Et item, à datis punctis, in ipsam F S perpendiculares A V, B X, C Y, D Z. Et F T perpendicularis in ipsam E R. Porro sit jam

A L	» *a*	A K	» *e*	radius E F	» *z*
B M	» *b*	B O	» *f*	G E	» *x*
C N	» *c*	C P	» *g*		
D H	» *d*	D Q	» *h*		

Quia autem E est centrum gravitatis punctorum A, B, C, D, si addantur in unum perpendiculares A L, B M, C N, D H, compositaque ex omnibus dividatur in tot partes, quot sunt data puncta, earum partium una æqualis erit E R *. Similiterque, divisâ in toti-

dem partes summa perpendicularium A K, B O, C P, D Q, earum unt æqualis erit perpendicularis, ducta ex E in rectam G K, sive ipsa R G*. Itaque, si summa omnium A L, B M, C N, D H, sive $a + b + c + d$ vocetur l: summa vero omnium, A K, B O, C P, D Q, sive $e + f + g + h$, vocetur m: & numerus, datorum punctorum multitudinem exprimens, dicatur θ, erit E R $= \frac{1}{2}$, & R G $= \frac{m}{\theta}$. Cumque G S sit x, erit R S sive F T $= \frac{m}{\theta} - x$; vel $\frac{m}{\theta} - x$, si G R major quam G S, & semper quadratum F T $= xx - 2\frac{mx}{\theta} + \frac{mm}{\theta\theta}$. quo ablato ab quadrato F E $= zz$, relinquetur quadratum T E $= zz - xx + 2\frac{mx}{\theta} - \frac{mm}{\theta\theta}$. Et proinde T E $= \sqrt{zz - xx + 2\frac{mx}{\theta} - \frac{mm}{\theta\theta}}$. Erat autem E R $= \frac{1}{2}$. Itaque T R $= \frac{1}{2} + \text{vel} - \sqrt{zz - xx + 2\frac{mx}{\theta} - \frac{mm}{\theta\theta}}$. quæ T R, brevitatis gratia, dicatur y. Colligamus jam porro summam quadratorum omnium F A, F B, F C, F D. Quadratum A F æquatur quadratis A V, V F. Est autem A V æqualis differentiæ duarum V K, A K, sive duarum S C, A K, ac proinde A V $= x - e$ vel $e - x$; & qu. A V $= xx - 2ex + ee$. V F vero æqualis est differentiæ duarum F S, V S sive duarum F S, A I; ac proinde V F $= y - a$ vel $a - y$; & qu. V F $= yy - 2ay + aa$. Additisque quadratis A V, V F, fit quadratum F A $= xx - 2ex + ee + yy - 2ay + aa$. Eodemque modo invenientur quadrata reliquarum F B, F C, F D, atque omnia ordine disposita erunt hæc,

qu. F A $= xx - 2ex + ee + yy - 2ay + aa$.
qu. F B $= xx - 2fx + ff + yy - 2by + bb$.
qu. F C $= xx - 2gx + gg + yy - 2cy + cc$.
qu. F D $= xx - 2hx + hh + yy - 2dy + dd$.

Horum vero summa; si ponamus quadrata $ee + ff + gg + hh = nn$; & quadrata $aa + bb + cc + dd = kk$, erit ista, $\theta xx - 2mx + nn + \theta yy - 2ly + kk$. Siquidem θ erat numerus datorum punctorum ideoque & quadratorum, positumque fuerat $e + f + g + h = m$, & $a + b + c + d = l$.

In ista vero summa, si in terminis θyy & $2ly$, pro y, ponatur id cujus loco positum erat, nempe $\frac{1}{2} + \text{vel} - \sqrt{zz - xx + 2\frac{mx}{\theta} - \frac{mm}{\theta\theta}}$, fiet $+\theta yy = \frac{\theta}{4} + 2l\sqrt{zz - xx + 2\frac{mx}{\theta} - \frac{mm}{\theta\theta}} + \theta zz - \theta xx + 2zm - \frac{mm}{\theta}$. & $-2ly = -2\frac{l}{2} - 2l\sqrt{zz - xx + 2\frac{mx}{\theta} - \frac{mm}{\theta\theta}}$.
vel $+\theta yy = \frac{\theta}{4} - 2l\sqrt{zz - xx + 2\frac{mx}{\theta} - \frac{mm}{\theta\theta}} + \theta zz - \theta xx + 2zm - \frac{mm}{\theta}$. & $-2ly = -2\frac{l}{2} + 2l\sqrt{zz - xx + 2\frac{mx}{\theta} - \frac{mm}{\theta\theta}}$.
Ac proinde, utroque casu, pro $\theta yy - 2ly$ habebitur $-\frac{\theta}{4} + \theta zz - \theta xx + 2xm - \frac{mm}{\theta}$. Quo appositis reliquis quantitatibus, summa prædi-

De centro Oscillationis

* Prop. 2. hujus

cta contentis, $9xx - 2xm + nn + kk$, fiet tota summa, nempe quadratorum EA, IB, EC, ED, $= 9zz + nn + kk - \ldots$. Quod apparet esse planum datum, cum ac quantitates omnes datæ sint, semperque eadem reperiri, ubicunque in circumferentia sumptum fuerit punctum E. quod erat demonstrandum.

Quod si puncta data diversas gravitates habere ponantur, invicem commensurabiles, ut si punctum A pondaret ut 2, B ut 3, C ut 4, D ut 7 eorumque reperto gravitatis centro, circulus rursus describatur, ad cujus circumferentiæ punctum, a datis punctis rectæ ducantur ac singularum quadrata multiplicia sumantur secundum numerum ponderis puncti illi, ut quadratum AE duplum, BE triplum, CE quadruplum, DE septuplum; dico rursus summam omnium æqualem fore spatio dato, semperque eadem, ubicunque in circumferentia punctum sumptum fuerit E. Patet enim hoc ex præcedenti demonstratione, si imaginemur puncta ipsa multiplicia secundum numeros attribuere cuique gravitatis, qui ibi nempe in A duo puncta conjuncta sint, in B tria, in C quatuor, in D septem, atque illa omnia æqualiter gravia.

PROPOSITIO XIII.

Si figura plana, vel linea in plano existens, aliter atque aliter suspendatur a punctis, quæ, in eodem plano accepta, æqualiter a centro gravitatis suæ distent; agitata motu in latus, sibi ipsi isochrona est.

Sit figura plana, vel linea in plano existens ABC, cujus centrum gravitatis D, quo eodem centro circumferentia circuli in eodem plano describatur, BCE. Dico, si quovis in illa puncto, ut B, C, vel C, suspensa figura agitetur in latus, sibi ipsi, sive cuiusvis pendulo simplici, isochronam esse.

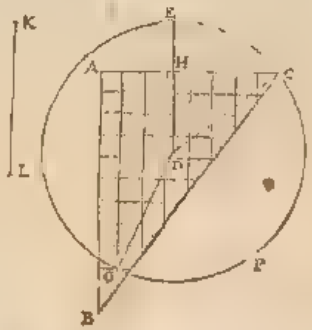
Si prima suspensio ex B puncto, quando autem est extra figuram, ut hic, [et tandem est] ducam BH, ex qua figura pendet, rigidam esse, atque immobiliter ipsi affixam.

Intelligatur figura ABC divisa in particulas minimas æquales, à quarum omnium centris gravitatis, ad punctum E, rectæ ductæ sint, quas quidem manifestum est, quum moveatur figura motu in latus, esse ad axem agitationis perpendiculares. Harum igitur omnium perpendicularium quadrata, divisa per rectam ED, multiplicem secundum numerum particularum in quas figura divisa est, efficiunt longitudinem pendulum simplicis, figuræ isochronæ, quæ

quæ sit K L. Suspensâ autem figurâ ex puncto G, rursus longitudo pendulî simplicis isochroni invenitur, dividendo quadrata omnia linearum, quæ à particulis figuræ ducuntur ad punctum G, per rectam G D, multiplicem secundam earundem particularum numerum *. Quum igitur puncta G & E sint in circumferentia descripta centro D, quod est centrum gravitatis figuræ A B C, sive centrum

De centro Oscillationis.

* Prop. 6 hu.



gravitatis punctorum omnium, quæ centra sunt particularum figuræ æqualium; erit proinde summa quadratorum à lineis, quæ à dictis particulis ad punctum G ducuntur, æqualis summæ quadratorum à lineis quæ ab iisdem particulis ducuntur ad punctum E *. Hæ vero quadratorum summæ, utraque suspensione, applicantur ad magnitudines æquales: quippe in suspensione ex E, ad rectam E D, multiplicem secundum numerum omnium particularum, in suspensione autem ex G, ad rectam D G, multiplicem secundum earundem particularum numerum. Ergo patet, ex applicatione hac posteriori, quum nempe suspensio est ex G, fieri longitudinem pendulî isochroni eandem atque ex applicatione priori, hoc est, eandem ipsi K L.

* Prop. 9 ejusdem.

Eodem modo, si ex C, vel alio quovis puncto circumferentiæ E C F, figura suspendatur, eidem pendulo K L isochrona esse probabitur. Itaque constat propositum.

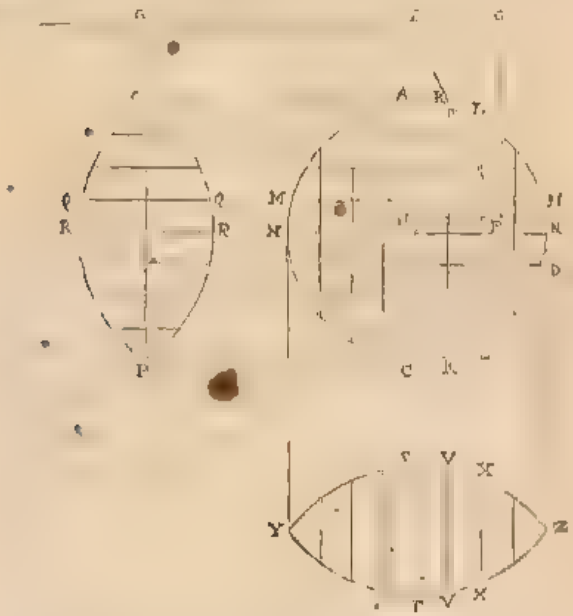
PROPOSITIO XIV.

Datâ figurâ solidâ, & lineâ rectâ interminatâ, quæ vel extra figuram cadat, vel per eam transeat; divisâque

De centro Oscillationis.

figurâ cogitatu in particulas minimas æquales, à quibus omnibus ad datam rectam perpendiculares ductæ intelligantur; invenire summam omnium quæ ab ipsis fiunt quadratorum, sive planum, cujus multiplex secundum particularum numerum, dictæ quadratorum summæ æquale sit.

Sit data figura solida A B C D, & linea recta quæ, per punctum E transiens, ad planum hujus paginæ erecta intelligatur: quæque vel secet figuram, vel tota extra cadat. Intellectoque, à singulis particulis minimis æqualibus, solidum A B C D constituentibus, velut F, rectas duci perpendiculares in datam rectam per E, quemadmodum hic F E, oporteat omnium quadratorum F E summam invenire.



Secetur figura plano E A C, per dictam datam lineam & per centrum gravitatis figuræ ducto. Item aliud planum intelligatur per eandem lineam datam, perque E G, quæ ipsi est ad angulos rectos.

Constat jam, quadratum rectæ cujusque, quæ à particula di-

ctarum aliqua, ad lineam datam per B perpendicularis ducitur, sicut F E, æquari quadratis duarum I G, F H, quæ, ab eadem particula, in plana per E G & E C ante dicta, perpendiculares aguntur *. Quare, si cognoscere possimus summam quadratorum, quæ fiunt ab omnibus perpendicularibus, quæ a particulis universis cadunt in plana dicta per E G & per E C, habebimus etiam huic æqualem summam quadratorum à perpendicularibus, quæ ab universis iidem particulis cadunt in rectam datam per B punctum.

De centro Oscillationis * [illegible]

Illa vero prior quadratorum summa colligetur hoc modo. Ponatur primo figuram planam dari O Q P, ad latus figuræ solidæ A B C D, ejusdem cum ipsa altitudinis, quæque sit ejusmodi, ut secta lineis rectis Q Q, R R, quæ respondeant planis figuram solidam A B C D secantibus M M, N N, & his parallelis, eadem sit dictarum linearum inter se, quæ & planorum horum ratio, si nempe sumantur utrinque quæ in ordine sibi respondent. Vt si linea A R sit ad Q Q, quemadmodum planum N N ad M M. Quod si igitur figura plana O Q P, in totidem particulas minimas æquales divisa intelligatur, quot intelliguntur in solido A B C D, erunt etiam in unoquoque segmento figuræ planæ, vel ut Q Q R R, tot numero particulæ, quot sunt in figuræ solidæ segmento M M N N, isti segmento respondente, ac proinde & summa quadratorum, à perpendicularibus omnium particularum figuræ O Q P in planum E G, æquabitur summæ quadratorum, à perpendicularibus omnium particularum figuræ solidæ, in idem planum E G productis. Illa autem quadratorum summa data erit, si detur in figura O Q P, cuneoque illius, quæ prop. 9. hujus requiri diximus. Ergo his datis, dabitur quoque summa quadratorum, à perpendicularibus quæ, à particulis omnibus solidi A B C D, ducuntur in planum E G.

Ponatur nunc alia item figura plana S Y T Z, ejusdem cum solido A B C D latitudinis, hoc est, quam includant plana B Y, D Z solidum contingentia, ac parallela plano E A C, quæque sit ejusmodi, ut, secta lineis rectis V V, X X &c. quæ respondeant planis figuram A B C D secantibus, K K, L L, & his parallelis, faciat eandem inter se rationem linearum harum atque illorum planorum, si sumantur quæ sibi mutuo respondent. Itaque rursus quadrata simul omnia perpendicularium, à particulis figuræ S Y T Z in rectam S T cadentium, æquabunt erunt quadratis omnibus perpendicularium quæ, à particulis solidi A B C D, ducuntur in planum A C. Illorum autem summa quadratorum data erit, si detur distantia centri gravitatis figuræ S Y T Z ab recta B Y vel D Z, nec non distantia iniidem centri gra-

DEFINITIO OSCILLATIONIS

vitatis cunei sui abscissi plano per eandem rectam * Vel, figura S Y T Z ordinata existente, ut S T sit axis ejus, eadem quadratorum summa dabitur, si detur distantia centri gravitatis figuræ dimidiæ S Z T ab axe S T, item centri gravitatis cunei, super eadem dimidia figura, abscissi plano per axem ducto *. Ergo, his datis, dabitur quoque summa quadratorum à perpendicularibus quæ, à particulis omnibus solidi A B C D, ductæ intelliguntur in planum B A C. Invenimus autem & summam quadratorum, à perpendicularibus omnibus in planum per B C ductis. Ergo & aggregatum utriusque summæ habebitur, hoc est, per superius ostenta, summa quadratorum perpendicularium quæ, à particulis omnibus solidi A B C D, cadunt in rectam datam per B transeuntem, & ad pagina hujus planum erectam. quod erat faciendum.

* Prop. 9 hui

* Prop. 11 hui

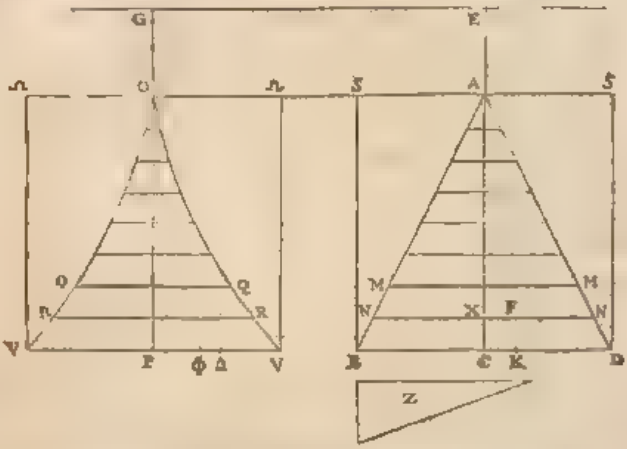
PROPOSITIO XV.

Iisdem positis, si solidum A B C D *sit eiusmodi, ut figura plana* S Y T Z, *ipsi proportionalis, non habeat notam distantiam centri gravitatis a tangentibus* B Y *vel* D Z, *vel, ut subcentrica cunei super ipsa abscissi, plano per easdem* B Y *vel* D Z, *ignoretur, in figura tamen proportionali, quæ a latere est,* O Q P, *detur distantia* O P, *qua centrum gravitatis figuræ dimidiæ* O P V *abest ab axe* O P; *licebit hinc invenire summam quadratorum à distantiis particularum solidi* A B C D *a plano* B C. *Oportet autem ut sectiones omnes,* N N, M M, *sint planæ similes; utque per omnium centra gravitatis transeat planum* B C; *quemadmodum in prismate, pyramide, cono, conoidibus, multisque aliis figuris contingit. Atque eorum planorum distantias centri gravitatis, super tangentibus axi oscillationis parallelis, datas esse necesse est; uti & subcentricas cuneorum, qui super ipsis abscinduntur, ductis planis per easdem tangentes.*

Veluti, si maxima dictarum sectionum sit B D, & in B intelligatur recta parallela axi E, hoc est, erecta ad planum quod hic conspicitur, oportet datam esse distantiam centri gr sectionis B D a dicta linea in B, quæ sit B C, itemque subcentricam cunei, super sectione B D abscissi, plano ducto per eandem lineam in B, quæ subcentrica sit B K.

Etenim his datis, divisâque P V bifariam in A, si fiat sicut A P ad

F Φ, ita rectangulum B C K ad ſpatium quoddam Z, dico hoc ipſum, multiplex per numerum particularum ſolidi A B C D, æquari ſummæ quæſitæ quadratorum, à diſtantiis earundem particularum à plano B C. De centro Oscillationis.



Quadrata enim à diſtantiis particularum planæ ſectionis B D, à plano B C, quod per centrum gravitatis ſuæ tranſit, ſive quadrata à diſtantiis particularum ſolidarum ſegmenti B N N D à plano eodem, æquari conſtat rectangulo B C K, multiplici per numerum dictarum particularum * Similiter, ſi planæ ſectionis N N diſtantia centri gravitatis, ab recta quæ in N intelligitur axi B parallela, ſit N X, ſubcentrica vero cunei ſuper ipſa abſciſſi, plano per eandem rectam, ſit N F, erunt quadrata à diſtantiis particularum planarum ſectionis N N à plano E C, ſive quadrata à diſtantiis particularum ſolidarum ſegmenti N M M N, à plano eodem, æqualia rectangulo N X F, multiplici per numerum particularum ipſarum ſectionis N N, vel ſegmenti N M M N Eſt autem B D diviſa ſimiliter in C & K, atque N N in X & F Ergo rectangulum B C K ad rectangulum N X F, ſicut quadratum B D ad quadratum N N. * Prop. 8 hu).

Eſt autem & numerus particularum ſectionis B D, ad numerum particularum ſectionis N N, ſicut ſectiones ipſæ; hoc eſt, ſicut quadratum B D ad quadratum N N. Itaque rectangulum B C K, multiplex per numerum particularum ſectionis B D, ad rectangulum N X F, multiplex per numerum particularum ſectionis N N, dupli-

De centro Oscillationis

catam habebit rationem quadrati B D ad quadratum N N, hoc est, eam quam quadratum V V ad quadratum R R, in figura proportionali. Erit igitur & dicta prior summa quadratorum, a distantiis particularum segmenti B N N D a plano E C, ad summam alteram quadratorum, a distantiis particularum segmenti N M M N, ut qu V V ad qu R R. Eademque ratione ostendetur, summas quadratorum à distantiis particularum in reliquis segmentis solidi A B C D, esse inter se in ratione quadratorum quæ fiunt à rectis in figura O V V, quæ basi cujusque segmenti respondent. Quare summa quadratorum, a distantiis particularum omnium segmentorum solidi A B C D à plano E C, erit ad summam quadratorum, à distantiis particularum segmentorum totidem, maximo segmento æqualium, hoc est, cylindri vel prismatis B D S S, eandem cum solido A B C D basin altitudinemque habentis, sicut quadrata omnia rectarum V V, R R, Q Q, &c. a quadrata totidem maximo V V æqualia, hoc est, sicut solidum rotundum O V V circa axem O P, ad cylindrum V V Ω Ω, qui basin & altitudinem habeat eandem. Hanc vero rationem solidi O V V ad cylindrum V V Ω Ω, componi constat ex ratione planorum quorum conversione generantur, hoc est, ex ratione plani O P V, ad rectangulum P Ω, & ex ratione distantiarum quibus horum planorum centra gravitatis abiunt ab axe O P, hoc est, & ex ratione P Φ ad P Δ. Et prior quidem harum rationum, nempe plani O P V ad rectangulum P Ω, eadem est quæ solidi A B C D ad cylindrum vel prisma B D S S, hoc est, eadem quæ numeri particularum solidi A B C D, ad numerum particularum cylindri vel prismatis B D S S. Altera vero ratio, nempe P Φ ad P Δ, est eadem, ex constructione, quæ spatii Z ad rectangulum B C K. Habebit itaque dicta summa quadratorum, a distantiis omnium particularum solidi A B C D à plano E C, ad summam quadratorum, a distantiis omnium particularum cylindri vel prismatis B D S S ab eodem plano, rationem eam quæ componitur ex ratione numeri particularum solidi A B C D, ad numerum particularum cylindri vel prismatis B D S S, & ex ratione spatii Z ad rectangulum B C K: hoc est, rationem quam habet rectangulum Z, multiplex per numerum particularum solidi A B C D, ad rectangulum B C K, multiplex per numerum particularum cylindri vel prismatis B D S S. Atqui quarta harum magnitudinum æqualis est secundæ, nempe rectangulum B C K, multiplex per numerum particularum cylindri vel prismatis B D S S, æquale summæ quadratorum, a distantiis particularum ejusdem prismatis vel cylindri B D S S à plano E C, siquidem rectangulum idem B C K, multiplex

per numerum particularum segmenti B N N D, æquatur quadratis distantiarum particularum ejusdem segmenti a plano E C*. Ergo & tertia primæ æqualitatur, nempe planum Z, multiplex per numerum particularum solidi A B C D, summæ quadratorum, a distantiis particularum solidi C, ejusdem A B C D a plano E C* quod erat demonstrandum.

De centris Oscillationis

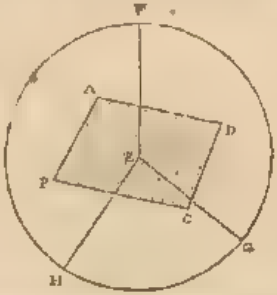
* Prop. 8. hujus.

* Prop. 14. lib. 5. Euclid.

Notandum vero, quando solidum A B D rotandum est circa axem A C, fieri semper rectangulum B C K æquale quartæ parti quadrati B C, quoniam subcentrica cunei, abscissi super circulo B D, plano per tangentem in B, nempe recta B K, æquatur radii B C*. Vnde, si P V æqualis posita sit B C, sequitur, faciendo DE P Δ ad P Φ ita rectangulum B C K, hoc est, quadrati B C, hoc est, quadrati P Δ ad planum aliud Z, fore hoc rectangulo Δ P Φ æquale. Ac proinde tunc ipsum rectangulum Δ P Φ, multiplex secundum numerum particularum solidi A B D, æquari summæ quæsitæ quadratorum a perpendicularibus omnibus, quæ à particulis eadem cadunt in planum B C.

PROPOSITIO XVI.

Figura quæcunque, sive linea fuerit, sive superficies, sive solidum, si aliter atque aliter suspendatur, agitetur que super axibus inter se parallelis, quique a centro gravitatis figuræ æqualiter distent, sibi ipsi isochrona est.



Proponatur magnitudo quævis, cujus centrum gravitatis E punctum, sitque primo suspensa ab axe, qui per F intelligitur hujus paginæ plano ad angulos rectos. Itaque idem planum erit & planum oscillationis. In quo si centro E, radio E I, describatur circumferentia I H G, sumptoque in illa puncto quovis, ut H, magnitudo secundo suspendi intelligatur ab axe in hoc puncto infixo, atque agitari, manente eodem oscillationis plano. Dico isochronam fore sibi ipsi agitatæ circa axem in F.

Intelligatur enim dividi magnitudo proposita in particulas minimas æquales. Itaque, quia in utraque illa suspensione idem manet oscillationis planum, respectu partium magnitudinis, manifestum est, si ab omnibus particulis, in quas divisa est magnitudo, perpendiculares cadere concipiantur in dictum oscillationis planum, illas utraque suspensione occurrere ipsi in punctis iisdem. Sint autem hæc puncta ea quæ apparent in spatio A B C D.

Quum igitur B sit centrum gravitatis magnitudinis propositæ, ipsaque proinde circa axem, qui per B punctum erectus est ad planum A B C D, quovis situ æquilibrium servet, facile perspicitur, quod si punctis omnibus ante dictis, quæ in spatio A B C D signantur, æqualis gravitas tribuatur, eorum quoque omnium centrum gravitatis futurum est punctum B. Quod si vero, ut fieri potest, in puncta aliqua plures perpendiculares concidant, illa puncta quasi toties geminata intelligenda sunt, gravitatesque toties multiplices accipiendæ. Atque ita consideratorum, patet rursus centrum gravitatis esse B punctum.

Porro si summam quadratorum ab rectis, quæ ducuntur à dictis punctis omnibus ad punctum I, eandem esse patet cum summa quadratorum ab iis rectis, quæ a singulis particulis magnitudinis propositæ ducuntur perpendiculares in axem oscillationis per F transeuntem; quippe cum lineæ ipsæ, quarum quadrata intelliguntur, utrobique eandem habeant longitudinem. Similiter etiam, cum suspensio est ex axe per H, patet summam quadratorum ab rectis, quæ ab omnibus punctis, in spatio A B C D signatis, ducuntur ad punctum H, eandem esse cum summa quadratorum, ab iis quæ, a particulis omnibus magnitudinis propositæ, ducuntur perpendiculares in axem oscillationis per H transeuntem. Ergo utroque casu, si summa quadratorum ab rectis quæ, a punctis omnibus prædictis, ducuntur ad puncta F vel H, dividatur per rectas E F vel E H, multiplices secundum numerum particularum in quas magnitudo proposita divisa intelligitur, orietur ex applicatione hac longitudo pendulis simplicis, quod magnitudini suspensæ ex F vel H isochronum sit. Est autem summa quadratorum utroque casu æqualis*, & rectæ quoque E F, E H, inter se æquales, & particularum idem numerus. Ergo, quum & applicatæ quantitates, & quibus illæ applicantur, utrobique æquales sint, etiam longitudines ex applicatione ortæ æquales erunt, hoc est, longitudines pendulorum isochronorum magnitudini propositæ suspensæ ex F vel ex H. Quare constat propositum.

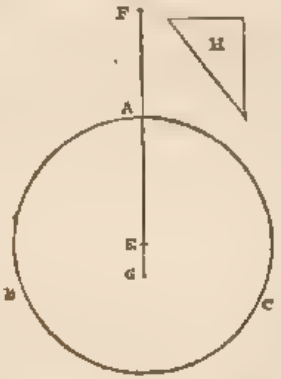
PROP.

De centro oscillationis

PROPOSITIO XVII.

Dato plano, cujus multiplex per numerum particularum, in quas suspensa figura divisa intelligitur, æquetur quadratis omnium distantiarum ab axe oscillationis; si illud applicetur ad rectam, æqualem distantiæ inter axem oscillationis & centrum gravitatis suspensæ magnitudinis, orietur longitudo pendulî simplicis ipsi isochroni.

Sit figura A B C, cujus centrum gravitatis E suspensa ab axe qui, per F punctum ad planum quod conspicitur, erectus sit. Ponendoque divisam figuram in particulas minimas æquales, a quibus omnibus, in dictum axem, perpendiculares cadere intelligantur: esto, per superius ostensa, inventum planum H, cujus multiplex per nu-



merum dictarum particularum, æquetur quadratis omnibus dictarum perpendicularium. Applicatoque plano H ad rectam F E, fiat longitudo F G. Dico hanc esse longitudinem pendulî simplicis, isochronas oscilationes habentis magnitudini A B C, agitatæ circa axem per F.

Quia enim summa quadratorum, à distantiis ab axe F, applicata ad distantiam F E, multiplicem secundum partium numerum, facit longitudinem pendulî simplicis isochroni *. Isti vero quadratorum summæ æquale ponitur planum H, multiplex per eundem particularum numerum. Ergo & planum H, multiplex per eundem particularum numerum, si applicetur ad distantiam F E, multiplicem

* P op 6 huj

Q

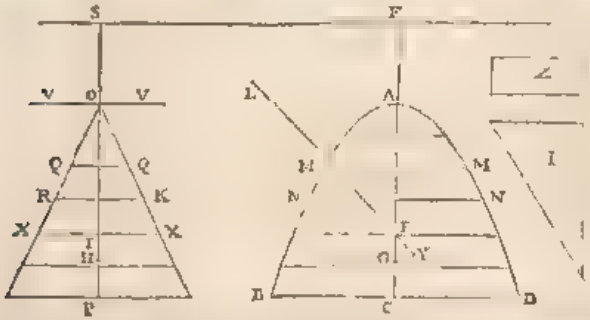
De centro Oscillationis

secundum particularum numerum, sive, omissa communi multiplicitate, si planum H applicetur ad distantiam F E, orietur quoque longitudo penduli simplicis isochroni. Quam prounde ipsam longitudinem F G esse constat, quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XVIII.

Si spatium planum, cujus multiplex secundum numerum particularum suspensæ magnitudinis, æquetur quadratis distantiarum ab axe gravitatis, axi oscillationis parallelo; id, inquam, spatium si applicetur ad rectam, æqualem distantiæ inter utrumque dictorum axium, orietur recta æqualis intervallo, quo centrum oscillationis inferius est centro gravitatis ejusdem magnitudinis.

Esto magnitudo A B C D, cujus centrum gravitatis E, quæque suspensa ab axe, qui per punctum F ad planum hujus paginæ erectus intelligitur, habeat centrum oscillationis G. Porro axi per F intelligatur axis alius, per centrum gravitatis E transiens, paralle-



lus Divisaque magnitudine cogitatu in particulas minimas æquales, sit quadratis distantiarum, ab axe dicto per E, æquale planum I, multiplex nempe secundum numerum dictarum particularum; applicatoque plano I ad distantiam F E, fiat recta quædam. Dico eam æqualem esse intervallo E G, quo centrum oscillationis inferius est centro gravitatis magnitudinis A B C D.

Vt enim universali demonstratione quod propositum est comprehendamus: intelligatur plana figura, magnitudini A B C D analoga, ad latus adposita, O Q P, quæ nempe, secta planis horizontalibus iisdem cum magnitudine A B C D, habeat segmenta inter-

cepta inter bina quæque plana, in eadem inter se ratione cum segmentis dictæ magnitudinis, quæ ipsis respondent, sintque segmenta singula figuræ O Q P, divisa in tot particulas æquales, quot continentur segmentis ipsis respondentibus in figura A B C D. Hæc autem intelligi possunt fieri, qualiscunque fuerit magnitudo A B C D, sive linea, sive superficies, sive solidum. Semper vero centrum gravitatis figuræ O Q P, quod sit T, eadem altitudine esse manifestum est cum centro gravitatis magnitudinis A B C D, ideoque, si planum horizontale, per F ductum, secet lineam centri figuræ O Q P, velut hic in S, æquales esse distantias S T, F E. De centro Oscillationis.

Porro autem constat quadrata distantiarum, ab axe oscillationis F, applicata ad distantiam F E, multiplicem secundum numerum particularum, efficere longitudinem penduli isochroni *; quæ longitudo posita fuit F G. Illorum vero quadratorum summam, æqualem esse perspicuum est, quadratis distantiarum à plano horizontali per F, una cum quadratis distantiarum a plano verticali F E, per axem F & centrum gravitatis E ducto *. Atqui quadrata distantiarum magnitudinis A B C D a plano horizontali per F, æquantur quadratis distantiarum figuræ O Q P ab recta S F. Quæ quadrata (si O sit punctum supremum figuræ O Q P, & H centrum gravitatis cunei super ipsa abscissi, plano per rectam O V, paradelam S F) æqualia sunt rectangulo O T H & quadrato S T, multiplicibus secundum numerum particularum dictæ figuræ *, sive magnitudinis A B C D. Quadrata vero distantiarum magnitudinis A B C D a plano F E, quantumcumque axis oscillationis F differt a centro gravitatis E, semper eadem sunt: quæ proinde putemus æqualia spatio Z, multiplici secundum numerum particularum magnitudinis A B C D.

* Prop. 6. huj.

* Prop. 47. lib. 1 Eucl.

* Prop. 9. huj.

Itaque quoniam quadrata distantiarum magnitudinis A B C D, ab axe oscillationis F, æquantur istis, quadrato nimirum S T, rectangulo O T H, & plano Z, multiplicibus per numerum particularum ejusdem magnitudinis, si applicentur hæc omnia ad distantiam F E sive S T, orietur longitudo F G penduli isochroni magnitudini A B C D *. Sed ex applicatione quadrati S T ad latus suum S T, oriretur ipsa S T, sive F E. Ergo reliqua E G est ea quæ oritur ex applicatione rectanguli O T H, & plani Z, ad eandem S T vel F E.

* Prop. 6. huj.

Quare superest ut demonstremus rectangulum O T H, cum plano Z, æquari plano I. Tunc enim constabit, etiam planum I, applicatum ad distantiam F E, efficere longitudinem ipsi E G æqualem. Illud autem sic ostendetur. Rectangulum O T H, multiplex secundum numerum particularum figuræ O Q P, sive magnitudinis A B

De horologio oscillatorio Part. II.

C D, æquatur quadratis distantiarum figuræ ab recta X T *, quæ per centrum gravitatis T ducitur ipsi S F parallela, ac proinde etiam quadratis distantiarum magnitudinis A B C D, a plano horizontali K K, ducto per centrum gravitatis E, cum distantiæ utrobique sint eædem. At vero planum Z, similiter multiplex, æquale positum fuit quadratis distantiarum magnitudinis A B C D a plano verticali F E. Ac patet quidem quadrata hæc distantiarum a plano F E, una cum dictis quadratis distantiarum a plano horizontali per E, æqualia esse quadratis distantiarum ab axe gravitatis per E, qui sit axi F parallelus * Itaque rectangulum O T H una cum plano Z, multiplicia secundum numerum particularum magnitudinis A B C D, æqualia erunt quadratis distantiarum ejusdem magnitudinis a dicto axe per E. Sed & planum I, multiplex secundum eundem particularum numerum, æquale positum fuit iisdem distantiarum quadratis. Ergo planum I æquale est rectangulo O T H & plano Z simul sumptis, quod ostendendum supererat.

* Vide Lib. I Prop.

Hinc rursus manifestum fit, quod propositione 16 demonstratum fuit; nempe magnitudinem quamlibet, si aliter atque aliter suspendatur atque agitetur, ab axibus parallelis, qui a centro gravitatis suæ æqualiter distent, sibi ipsi isochronam esse.

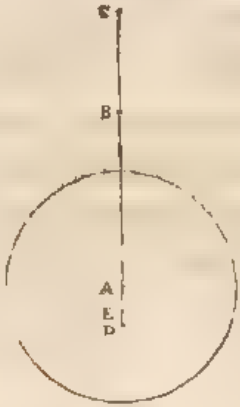
Sive enim magnitudo A B C D suspendatur ab axe F, sive ab axe L illi parallelo, patet eadem utrobique esse quadrata distantiarum ab axe per E, qui sit axibus F vel L parallelus. Vnde & planum I, cujus multiplex, secundum numerum particularum, æquatur quadratorum summæ, utroque casu idem erit. Hoc vero planum, applicatum ad distantiam centri gravitatis ab axe oscillationis, quæ utroque casu eadem ponitur, efficit distantiam qua centrum oscillationis inferius est centro gravitatis. Ergo etiam hæc distantia utroque casu eadem erit. Velut si, facta suspensione ex L, fuerit dicta distantia E Y, erit ipsa æqualis E G, & tota Y L æqualis G F; adeoque, in suspensione utraque, idem pendulum simplex isochronum sit magnitudini A B C D.

PROPOSITIO XIX.

Si magnitudo eadem, nunc brevius nunc longius suspensa, agitetur; erunt, sicut distantiæ axium oscillationis à centro gravitatis inter se, ita contraria ratione distantiæ centrorum oscillationis ab eodem gravitatis centro.

Sit magnitudo, cujus centrum gravitatis A, suspensa primum atque agitata ab axe in B, deinde vero ab axe in C; sitque in prima

suspensione centrum oscillationis D, in posteriori vero centrum oscillationis E. Dico esse ut B A ad C A ita E A ad D A. De centro Oscillationis.



Quum enim, in suspensione ex B, efficiatur distantia A D, quanempe centrum oscillationis inferius est centro gravitatis, applicando ad distantiam B A spatium quoddam, cujus multiplex secundum numerum particularum minimarum æqualium, in quas magnitudo divisa intelligitur, æquatur quadratis distantiarum ab axe per A, parallelo axi in a *, erit proinde rectangulum B A D dicto spatio æquale. Item, in suspensione ex C, quum fiat distantia A E, applicando idem dictum spatium ad distantiam C A, erit & rectangulum C A E eidem spatio æquale. Itaque æqualia inter se rectangula B A D, C A E, ac proinde ratio B A ad C A eadem quæ A E ad A D. quod erat demonstrandum. * Prop. prec.

Hinc patet, dato pendulo simplici, quod magnitudini suspensæ isochronum sit in una suspensione, datoque ejus centro gravitatis, etiam in alia omni suspensione, longiori vel breviori, dummodo idem maneat planum oscillationis, longitudinem penduli isochroni datam esse.

PROPOSITIO XX.

Centrum Oscillationis & punctum suspensionis inter se convertuntur.

In figura superiori, quia, posita suspensione ex B, centrum oscillationis est D, etiam invertendo omnia, ponendoque suspen-

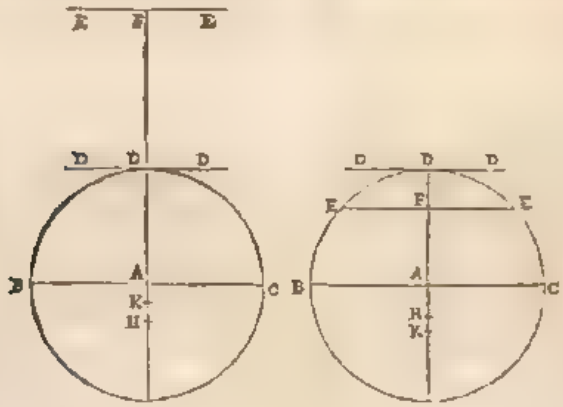
De centro oscillationis.

sionem ex D, erit tunc centrum oscillationis B. Hoc enim ex ipsa propositione præcedenti manifestum est.

PROPOSITIO XXI.

Quomodo in figuris planis centra oscillationis inveniantur.

Intellectis quæ hactenus demonstrata sunt, facile jam erit in plerisque figuris, quæ in Geometria considerari consueverunt, definire oscillationis centra. Atque ut de planis figuris primum dicamus, duplicem in iis oscillationis motum supra definivimus; nempe, vel circa axem in eodem cum figura plano jacentem, vel circa eum qui ad figuræ planum erectus sit. Quorum priorem vocavimus agitationem in planum, alterum agitationem in latus.



Quod si priore modo agitetur, nempe circa axem in eodem plano jacentem, sicut figura B C D circa axem E F; hic, si cuneus super figura intelligatur abscissus, plano quod ita secet planum figuræ, ut intersectio, quæ hic est D D, sit parallela oscillationis axi, deturque distantia centri gravitatis figuræ ab hac intersectione, ut hic A D; itemque subcentrica cunei dicti super eadem intersectione, quæ hic sit D H. Habebitur centrum oscillationis K, figuræ B D C, applicando rectangulum D A H ad distantiam F A; quoniam ex applicatione hac orietur distantia A K, qua centrum oscillationis infimus est centro gravitatis. Est enim rectangulum D A H, multiplex secundum numerum particularum figuræ B C D, æquale quadratis distantiarum ab recta B A C, quæ per centrum gravi-

ratis A parallela ducitur axi oscillationis E F *. Quare, applicando idem rectangulum ad distantiam F A, orietur distantia A K, qua centrum oscillationis inferius est centro gravitatis A *.

De centro Oscillationis * Propos. 14. * Coroll. 5.

Hinc manifestum est, si axis oscillationis sit D D, fieri centrum oscillationis H punctum, adeoque longitudinem D H, pendulii simplicis isochroni figuræ B C D, esse tunc ipsam subcentricam cunei, abscissi plano per D D, super ipsam D D. Quod unum ab aliis ante animadversum fuit, non tamen demonstratum.

Quomodo autem centra gravitatis cuneorum super figuris planis inveniantur, persequi non est instituti nostri, & jam in multis nota sunt. Velut, quod si figura B C D sit circulus, erit D H æqualis diametri. Si rectangulum, erit D H [illegible] diametri. Unde & ratio apparet cur virga, seu linea gravitate prædita, altero capite suspensa, isochrona sit pendulo longitudinis subsesquialteræ. Considerando nempe lineam ejusmodi, ac si esset rectangulum minimæ latitudinis.

Quod si figura triangulum fuerit, vertice sursum converso, fit D H $\frac{2}{3}$ diametri. Si deorsum, $\frac{1}{3}$ diametri.

Quod autem propositione 16 demonstratum fuit, id ad hujusmodi figuræ planæ motum ita pertinere sciendum. Nempe, si aliam atque aliam positionem demus figuræ B C D, invertendo eam circa axem B A C, ut vel horizonti parallela jacerat, vel oblique inclinetur, manente eodem agitationis axe F E, etiam longitudo pendulii isochroni F K eadem manebit. Hoc enim ex propositione illa manifestum est.

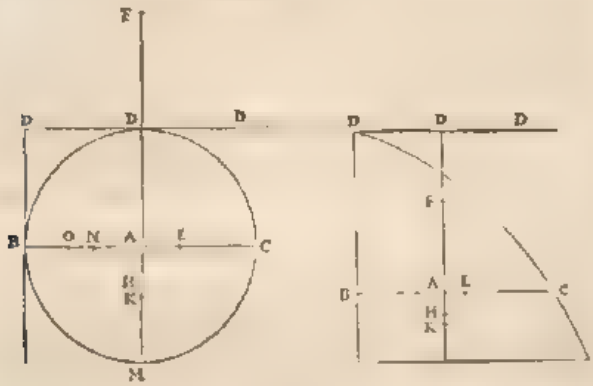
Porro quando figura plana, circa axem ad planum figuræ erectum, agitatur, quam vocavimus agitationem in latus, velut si figura B C D moveatur circa axem, qui per punctum F intelligitur ad planum D B C erectus, hic jam præter cuneum super figura, qui abscinditur plano ducto per D D, tangentem figuram in puncto summo, alter quoque considerandus cuneus, qui abscinditur plano per B D, tangentem figuram in latere, quæque tangenti D D sit ad rectos angulos. Oporteteque dari, præter figuræ centrum gravitatis A, subcentricamque H D cunei prioris, etiam subcentricam L D cunei posterioris. Ita enim nota erunt rectangula D A H, B A L, quæ simul sumpta faciunt hic spatium applicandum, quod deinceps etiam Rectangulum oscillationis vocabitur. Quod nempe, applicatum ad distantiam F A, dabit distantiam A K, qua centrum oscillationis K inferius est centro gravitatis A.

Si vero F A sit axis figuræ B C D, potest, pro cuneo abscisso per

De centro Oscillationis

B D super figura tota, adhiberi cuneus super figura dimidia D B M abscissus plano per D M. Nam, si cunei hujus subcentrica super D M sit O A, distantia vero centri gr. figuræ planæ D B M ab eadem D M sit N A, æquale esse constat rectangulum O A N rectangulo B A L *. Itaque rectangulum O A N, additum rectangulo D A H, constituet quoque planum applicandum ad distantiam F A, ut fiat distantia A K.

* Prop. 11. huj.



Et horum quidem manifesta est demonstratio ex præcedentibus, quippe cum rectangula D A H, B A L, vel D A H, O A N, multiplicia secundum numerum particularum figuræ, æqualia sint quadratis distantiarum a centro gravitatis A, sive, quod idem hic est, ab axe gravitatis axi oscillationis parallelo, ac proinde rectangula dicta, ad distantiam F A applicata, efficiant longitudinem intervalli A K *.

* Prop. 18. huj.

Centrum Oscillationis Circuli.

Et in circulo quidem rectangula D A H, B A L, inter se æqualia esse liquet, simulque efficere semissem quadrati à semidiametro. Vnde, si fiat ut F A ad semidiametrum A B, ita hæc ad aliam, ejus dimidiam erit distantia A K, à centro gravitatis ad centrum oscillationis. Si igitur circulus ab axe D, in circumferentia sumpto, agitetur, erit D K æqualis tribus quartis diametri D M.

Ad hunc modum & in sequentibus figuris planis centra oscillationis quæsivimus, quæ simpliciter adscripsisse sufficiet. Nempe,

Centrum

Centrum oscillationis Rectanguli.

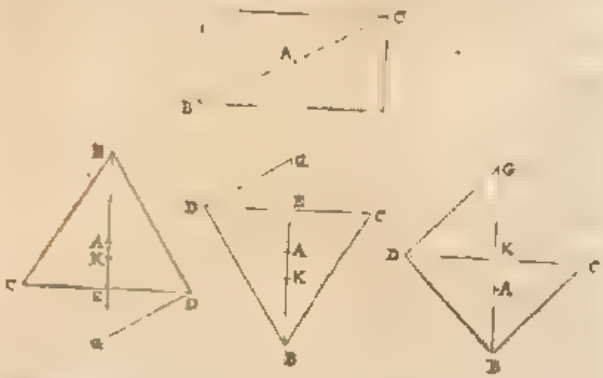
De centro Oscillationis.

In rectangulo omni, ut C B, spatium applicandum, sive rectangulum oscillationis, invenitur æquale tertiæ parti quadrati à semidiagonio A C. Vnde sequitur, si rectangulum ab aliquo angulorum suspendatur, motuque hoc laterali agitetur, pendulum illi isochronum esse ⅓ diagonii totius.

Centrum oscillationis Trianguli isosceles.

In triangulo isosceles, cujusmodi C B D, spatium applicandum æquatur parti decimæ octavæ quadrati à diametro B E, & vigesimæ quartæ quadrati baseos C D. Vnde, si ab angulo baseos ducatur D G, perpendicularis super latus D B, quæ occurrat productæ diametro B E in G, sitque A centrum gravitatis trianguli, divisoque intervallo G A in quatuor partes æquales, una earum A K apponatur ipsi B A, erit B K longitudo pendali isochroni, si triangulum suspendatur ex vertice B. Cum autem ex puncto mediæ basis E suspenditur, longitudo pendali isochroni B K æquabitur dimidiæ B G.

Atque hinc liquet, triangulum isosceles rectangulum, si ex puncto mediæ basis suspendatur, isochronum esse pendulo longitudinem diametro suæ æqualem habenti. Similiterque, si suspendatur ab angulo suo recto, eidem pendulo isochronum esse.



Centrum oscillationis Parabolæ.

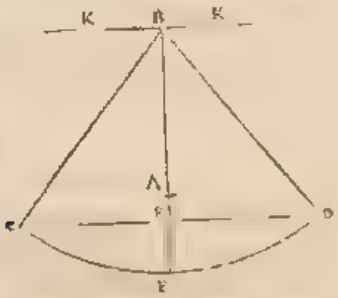
In parabolæ portione recta, spatium applicandum æquatur $\frac{n}{17}$ quadrati axis, una cum quinta parte quadrati dimidiæ basis. Cum-

De centro Oscillationis.

que parabola ex verticis puncto suspensa est, invenitur pendulum isochronum longitudo axis, atque insuper lateris recti. Cum vero ex puncto mediæ basis suspenditur, erit ea longitudo $\frac{3}{4}$ axis, & insuper $\frac{1}{4}$ lateris recti.

Centrum oscillationis Sectoris circuli.

In circuli sectore B C D, si radius B C vocetur r: semi arcus C F, p: semisubtensa C E, b: sit spatium applicandum æquale $\frac{rr}{p}$ $\frac{4rrr}{3pp}$, hoc est, dimidio quadrati B C, minus quadrato B A, ponendo

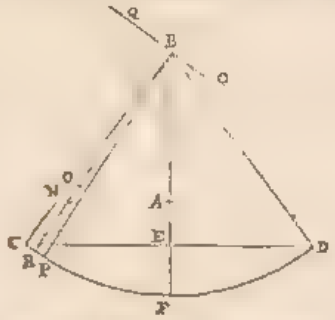


A esse centrum gravitatis sectoris. Tunc enim B A $= \frac{4rr}{3p}$. Si autem suspendatur sector ex B, centro circuli sui, fit pendulum ipsi isochronum $\frac{4r}{3p}$, hoc est, trium quartarum rectæ, quæ sit ad radium B F ut arcus C F D ad subtensam C D. Hæc autem inveniuntur cognitis subcentricis cuneorum, tum illius qui super sectore toto abscinditur, plano ducto per B K parallelam subtensæ C D, cujus cunei subcentricam super B K invenimus esse $\frac{r}{4} - \frac{3}{8}a + \frac{3}{8}$, vocando a sinum versum B F; tum illius qui super dimidio sectore B F C abscinditur plano per B F, cujus nempe cunei subcentricam super B F invenimus $\frac{3}{8}b - \frac{3rr}{8a} + \frac{rrr}{4aa}$.

Sed & alia via, sectoris centrum oscillationis, facilius inveniri, quæ est hujusmodi. Intelligatur sectoris B C D pars minima sector B C P, qui trianguli loco haberi potest. Quadrata autem, à distantiis particularum ejus à puncto B, æqualia sunt quadratis distantiarum ab recta B R, bifariam sectorem dividente, una cum quadratis distantiarum ab recta B Q, quæ ipsi B R est ad angulos rectos. Sed, horum quadratorum ad illa, ratio quavis data est major, quoniam angulus C B P minimus, ideoque illa pro nullis habenda sunt.

Positâ vero B O duarum tertiarum B R, hoc est, posito O centro gravitatis trianguli B C P; & B N trium quartarum B R, ut nempe N sit centrum gravitatis cunei, super triangulo B C P abscissi plano per B Q. His positis, constat quadrata, à distantiis particularum trianguli B C P ab recta B Q, æquari rectangulo N B O multiplici secundum particularum ejusdem trianguli numerum. Itaque rectangulum N B O, ita multiplex, æquale censendum quadratis distantiarum a puncto B particularum trianguli B C P. Sunt autem quadrata

De centro Oscillationis.



distantiarum harum, ad quadrata distantiarum totius sectoris B C D, sicut sector B C P ad sectorem B C D, hoc est, sicut numerus particularum sectoris B C P, ad numerum particularum sectoris B C D, hoc enim facile intelligitur, eo quod sector B C D dividatur in sectores quales B C P. Ergo rectangulum N B O, multiplex secundum numerum particularum sectoris B C D, æquale erit quadratis distantiarum particularum ejus a puncto B. Ideoque rectangulum N B O, applicatum ad B A, distantiam inter suspensionem & centrum gravitatis sectoris, dabit longitudinem penduli isochroni, cum sector ex B suspenditur *. Est autem rectangulum N B O = [illegible] rr. distantia autem B A, ut jam ante diximus, = [illegible]. Unde, facta applicatione, oritur [illegible], longitudo penduli isochroni, ut ante quoque inventa fuit.

* Propos. 20

Centrum oscillationis Circuli, aliter quam supra.

Eodem modo etiam simplicissime, in circulo, centrum oscillationis invenire licet. Sit enim circulus C C F, cujus centrum B, sectorque in eo minimus intelligatur B C P, sicut ante in sectore B C D.

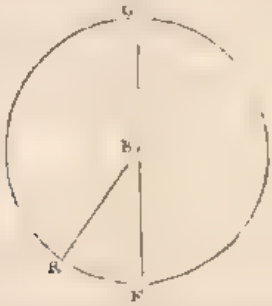
De centro Oscillationis.

Cum igitur, secundum modo exposita, quadrata, à distantiis particularum sectoris B C P ad centrum B, æquentur rectangulo N B O, hoc est, dimidio quadrato radii, multiplici secundum sectoris ipsius particularum numerum, circulus autem ex ejusmodi sectoribus componatur; erunt proinde quadrata, à distantiis particularum circuli totius ad centrum B, æqualia dimidio quadrato radii, multiplici secundum numerum earundem circuli particularum.

Est autem B centrum gravitatis circuli. Ergo dictum dimidium quadratum radii, hic erit spatium applicandum distantiæ inter suspensionem & centrum B, ut habeatur intervallum, quo centrum oscillationis inferius est ipso centro B *. quod & supra ita se habere ostendimus.

* Propos. 10.

Centrum oscillationis Peripheriæ circuli.



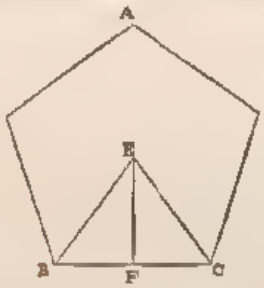
Facilius etiam, centrum oscillationis circumferentiæ circuli, hoc

pacto reperitur. Esto enim circumferentia descripta centro B, radio B R. Quadratum igitur B R, multiplex secundum numerum particularum in quas circumferentia divisa intelligitur, æquatur quadratis a distantiis omnium earum particularum ad centrum B. Quare quadratum B R erit hic spatium applicandum *. Patetque hinc, si suspensio fit ex G, puncto circumferentiæ, pendulum isochronum longitudinem æquari diametro G F. De centro Oscillationis.

* Prop. 18 hu

Centrum oscillationis Polygonorum ordinatorum.

Haud absimiliter & polygono cuivis ordinato, ut A B C, pendulum isochronum inventur. Fit enim, spatium applicandum, æquale semissi quadrati perpendicularis ex centro in latus polygoni, una



cum vigesima quarta parte quadrati lateris. At, si perimetro polygoni pendulum isochronum quæratur, fit spatium applicandum æquale quadrato perpendicularis a centro in latus, cum duodecima parte quadrati lateris.

Loci plani & solidi usus in hac Theoria.

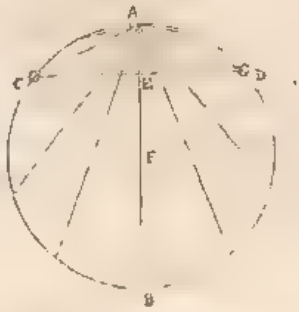
Est præterea & Locorum contemplatio in his non injucunda. Vt si propositum sit, dato puncto suspensionis A, & longitudine A B, invenire locum duorum ponderum æqualium C, D, æqualiter ab A & à perpendiculari A B distantium, quæ agitata circa axem in A, perpendicularem plano per A C D, isochrona sint pendulo simplici longitudinis A B.

Ponatur A B = a, ductâque C D, quæ secet A B ad angulos rectos in E, sit A E indeterminata = x: E C vel E D = y. Ergo quadratum A C = $xx + yy$. Hoc vero multiplex secundum numerum particularum ponderum C, D, quæ hic minima intelliguntur, æquatur quadratis distantiarum earundem particularum ab axe

De centro Oscillationis

suspensionis A. Ergo quadratum A C, sive $xx + yy$, applicatum ad distantiam A E, quæ nempe est inter axem suspensionis & centrum gravitatis ponderum C, D, efficiet [illegible], longitudinem pendulii isochroni *, quam propterea oportet æqualem esse A B sive a.

* Prop. 17. hu



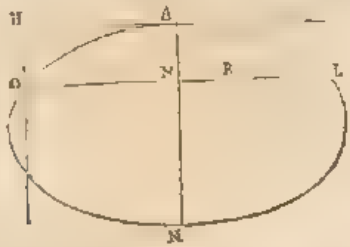
Itaque [illegible] » a Et yy » $ax - xx$. Vnde patet, locum punctorum C & D, esse circumferentiam circuli, cujus centrum F, ubi A B bifariam dividitur, radius autem » [illegible] a, sive F A. Ergo, ubicunque in circumferentia A C B D duo pondera æqualia, æqualiter ab A distantia, ponentur, ea, ex A agitata, isochrona erunt pendulo longitudinem habenti æqualem diametro A B.

Atque hinc manifestum quoque, & circumferentiam A C B D, si gravitas ei tribuatur, & quamlibet ejus portionem, æqualiter in A vel B divisam, & ab axe per A suspensam, eidem pendulo A B isochronam esse.

Loci vero solidi exemplum esto hujusmodi. Sit A N linea inflexilis sine pondere. Propositumque sit, ad punctum in ea acceptum, ut M, affigere ipsi ad angulos rectos lineam, seu virgam, pondere præditam O M L, ad M bifariam divisam, cujus in latus agitatæ oscillationes, ex suspensione A, isochronæ sint pendulo simplici longitudinis A N.

Ducatur O H parallela A N, & A H parallela O M, & sit O R æqualis * O L. Itaque cunei super recta O L, abscissi plano per O H ducto, subcentrica erit O R. Sed cunei alterius super eadem O L, abscissi plano per rectam A H, (est autem cuneus hic nihil aliud quam rectangulum) subcentrica erit ipsa A M. Quare rectangulum illud, quod supra Oscillationis vocavimus, erit totum rectangulum O M R quod nempe, applicatum ad longitudinem A M, dabit distantiam centri oscillationis lineæ O L, ex A suspensæ, infra punctum M.

Sit jam A N = a: A M = x: M O vel M L = y Est ergo rectangulum O M R = $\frac{1}{3}yy$. quo applicato ad A M, fit $\frac{yy}{3x}$. quæ longitudo itaque ipsi M N æqualis esse debebit, cum velimus centrum oscillationis virgæ O I esse in N Fit ergo æquatio $\frac{yy}{3x} + x = a$. Unde $y = \sqrt{3ax - 3xx}$. Quod significat puncta O & L esse ad Ellipsin, cujus axis minor A N, latus rectum vero, secundum quod possunt ordinatim ad axem hanc applicatæ, ipsius A N triplum. De centro Oscillationis.



Hinc vero manifestum fit, cum omnis virga ipsi O I parallela, & ad Ellipsin hanc terminata, oscillationes isochronas habeat pendulo simplici A N, etiam totum Ellipseos planum, ex A suspensum & in latus agitatum, ipsi A N pendulo isochronum fore. Sed & partem Ellipseos quamlibet, quæ lineis una vel duabus, ad A N perpendicularibus, abscinderur.

Cæterum adscribemus & aliud loci plani exemplum, in quo nonnulla notatu digna occurrunt.

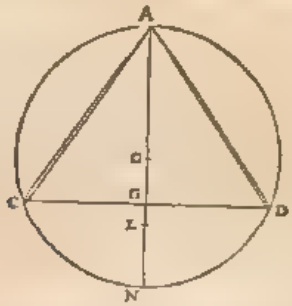
Sit virga A B ponderis expers, suspensa ex A, oportearque, ad da-

De centro Oscillationis

tum in ea punctum B, affigere triangula duo paria, & paribus angulis ab axe A B recedentia, quorum anguli ad B minimi, sive infinite parvi existimandi, quæque, ita suspensa ab A, oscillationes isochronas faciant pendulo simplici datæ longitudinis A I.

Hic, ducta C G perpendiculari in B G, & ponendo A B = a, A I = b; B G = x, C G = y, invenitur æquatio $y = \sqrt{2ab - 2aa - 2ax + bx - xx}$ ex qua patet, bases triangulorum C, & D, quæ bases hic ut puncta considerantur, esse ad circuli circumferentiam, quia nempe habetur terminus simplex $-xx$.

Licet autem hic animadvertere, quod si a sit nihilo æqualis, hoc est, si punctum, ubi affiguntur trianguli B C, B D, sit idem cum puncto A, tum futura sit æquatio $y = \sqrt{bx - xx}$. Ac proinde, hoc casu, si sumatur A O = $\frac{1}{2}b$, hoc est, = $\frac{1}{2}$ A L, centroque O per A circulus describatur A D N, erunt bases triangulorum A C,



A D, ad illius circumferentiam. Cum igitur quilibet duo triangula acutissima, quæ ex A ad circumferentiam A C N D constituuntur, magnitudine & situ sibi respondentia, centrum oscillationis habeant punctum L, positâ A L = $\frac{1}{2}$ diametri A N, cumque circulus totus ex cujusmodi triangulorum paribus componatur, uti & portio ejus quælibet, ut A C N D, latera A C, A D æquana habens, manifestum est, tum circuli totius, tum portionis qualem diximus, centrum oscillationis esse in L.

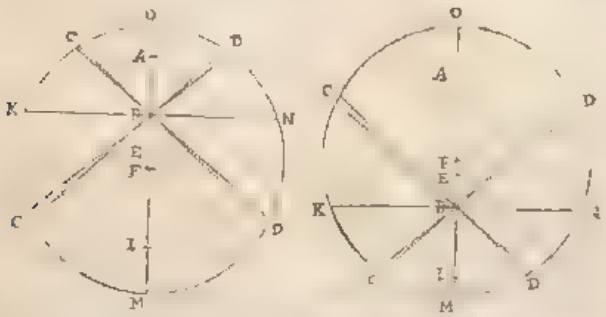
Rursus, si in æquatione inventa ponatur $\frac{1}{2}a = \frac{1}{2}b$, seu $2a = b$, hoc est, si triangula affigi intelligantur in B, quod longitudinem A I sicet bifariam, erit $y = \sqrt{2aa - xx}$. quæ æquatio docet, quod si centro B, radio qui possit duplum B A, circumferentia describatur, ea erit locus basium triangulorum acutissimorum B C, B D,

quorum

quorum nempe, ex A suspensorum, centrum oscillationis erit I punctum. Cumque & circulus totus, & sector ejus quilibet, axem habens in recta A I, ex hujusmodi triangulorum paribus componatur, manifestum est & horum, ex A suspensorum, centrum oscillationis esse punctum I. De centro Oscillationis

Adeoque quilibet circuli sector, suspensus à puncto quod distet, a centro circuli sui, semisse lateris quadrati circulo inscripti, pendulum isochronum habebit toti eidem lateri æquale. Atque ita, hoc uno casu, absque posita dimensione arcus, pendulum sectori isochronum invenitur.

Porro, ad universalem constructionem æquationis primæ, $y = \sqrt{2ab - 2aa \quad ax + bx - xx}$, dividatur A I bifariam in E, & adponatur ad B E pars sui tertia E F, eaque F centrum describendi circuli, radius autem F O æqualis sumendus ei, quæ potest duplum differentiæ quadratorum A E, B F.

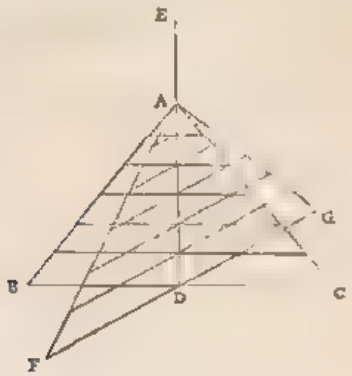


Si itaque, ex puncto B, ad descriptam circumferentiam triangula duo paria acutissima constituantur, L C B C, B D, illorum, ex A

Et centro oscillationis

suspensorum, centrum oscillationis erit L. Quare & portionis cujusliber descripti circuli, cujus portionis vertex sit in B, axis vero in recta A L, quales sunt utraque C B D, posita suspensione ex A, centrum oscillationis idem punctum L esse constat. Atque adeo etiam circuli segmentorum K O N, K M N, quæ facit recta K B N perpendicularis ad A B.

Et hæc quidem de motu laterali planorum, ac linearum, animadvertisse sufficiat. Quibus hoc tantum addimus, inventis centris oscillationis figurarum rectarum, seu quæ æqualiter ad axem utrinque constituræ sunt; ut trianguli isosceles, vel parabolicæ sectionis rectæ; etiam obliquarum, quæ velut luxatione illarum efficiuntur, ut trianguli scaleni, & parabolæ non rectæ, centra oscillationis habere. Vt si, exempli gratia, triangulum B A C isosceles, cujus axis A D, à puncto E suspensum intelligatur, sit vero & aliud triangulum scalenum F A G, axem eundem habens A D, & basin F G æqualem basi B C, etiam hoc triangulum, ex E suspensum, priori B A C isochronum esse dico.



Quia enim virga, seu linea gravis, F G, affixa virgæ sine pondere E D in D, situ obliquo, suspensaque ex E, isochrona est virgæ B C, similiter in D affixæ*; idemque evenit in virgis cæteris trianguli utriusque, quæ axem A D secant in iisdem punctis, atque inter se æquales sunt. necesse est tota triangula, quæ ex lineis, seu virgis iisdem composita intelligi possunt, isochrona esse. In aliis figuris similis est demonstratio.

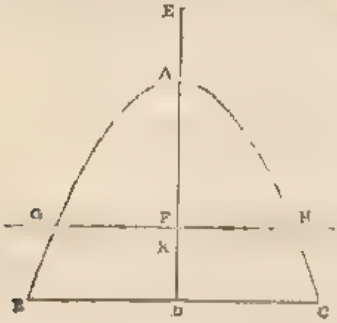
* Deest ut hic

PROPOSITIO XXII.

De centro Oscillationis.

QVomodo, in solidis figuris, oscillationis centra inveniantur.

In solidis porro figuris facile quoque, per ante demonstrata, centrum oscillationis invenire licebit. Si enim sit solidum A B C, suspensum ab axe, qui, per punctum B, intelligitur hujus paginæ plano ad rectos angulos, centrum autem gravitatis sit F. ductis jam per F planis B F D, G F H, quorum posterius sit horizonti parallelum, alterum vero per axem B transeat, inventisque, per propositionem 14, summis quadratorum à distantiis particularum solidi A B C a plano G F H, itemque à plano B F D, hoc est, inventis rectangulis utriusque, quæ, multiplicia secundum numerum dictarum particularum, æqualia sint dictis quadratorum summis, rectangula hæc applicata ad distantiam B F, qua nempe axis suspensionis distat a centro gravitatis, dabunt intervallum F K, quo centrum agitationis K inferius est centro gravitatis F. Hoc enim patet ex propositione 18. Dabimus autem & horum exempla aliquot.



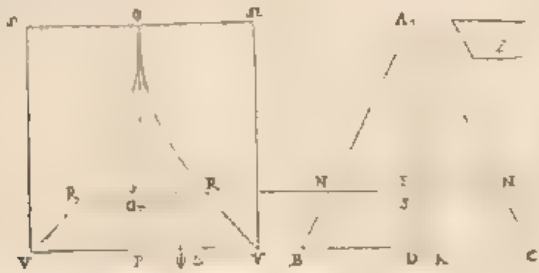
Centrum oscillationis in Pyramide.

Sit primum A B C pyramis, verticem habens A, axem A D, basin vero quadratum, cujus latus B C. ponaturque agitari circa axem qui, per verticem A, sit hujus paginæ plano ad angulos rectos.

Hic figura plana proportionalis O V V, a latere adponenda, secundum propositionem 14, constabit ex residuis parabolicis O F V, quæ nempe superfunt, cum, à rectangulis Ω F, auferantur semiparabolæ O V Ω, verticem habentes O.

De centro Oscillationis

Sicut enim inter se sectiones pyramidis B C, N N, ita quoque rectæ V V, R R, ipsis in figura plana respondentes & sicut centrum gravitatis E distat, à vertice pyramidis, tribus quartis axis A D, ita quoque centrum gravitatis F, figuræ O V V, distabit tribus quartis diametri O P à vertice O.



Intellecto porro horizontali plano N B, per centrum gravitatis pyramidis A B C, quod idem figuram O V V secet secundum R F, inventâque subcentrici cunei, super figura O V V abscissi plano per O Ω, quæ subcentrica sit O G, (est autem * diametri O P) erit rectangulum O F G, multiplex per numerum particularum figuræ O V V, æquale quadratis distantiarum ab recta R F *, ac proinde quoque quadratis distantiarum a plano N B, particularum solidi A B C. Fit autem rectangulum O F G æquale, quadrati O P, vel quadrati A D.

* Prop. 10. lib.

Deinde, ad inveniendam summam quadratorum à distantiis à plano A D, noscenda primo subcentrica cunei, super quadrata basi pyramidis B C abscissi, plano per rectam quæ in B intelligitur axi A parallela, quæ subcentrica sit B K, eiusque B C. Noscenda item distantia centr. gr. dimidiæ figuræ O P V ab O P, quæ sit Φ P, estque P V. Inde, divisâ bifariam P V in Δ, si fiat ut Δ P ad P Φ, hoc est, ut ς ad 1, ita rectangulum B D K, quod est quadrati B C, ad aliud spatium z; erit hoc, multiplex secundum numerum particularum solidi A B C, æquale quadratis distantiarum a plano A D *. Apparet autem, fieri spatium z æquale quadrati B C.

* [illegible]

Itaque, totum spatium applicandum, æquatur hic quadrati A D, cum quadrati B C. Vnde, si suspensio, ut hic, posita fuerit in A, vertice pyramidis, ideoque distantia, ad quam applicatio facienda,

A B æqualis A D, fiet hinc E S, intervallum quo centrum agitationis inferius est centro gravitatis, æquale ⅔ A D, atque insuper ⅓ tertiæ proportionalis duabus A D, B C. sive tota A S æqualis ⅔ A D, præter dictam ⅓ tertiæ proportionalis. Di centro Oscillationis.

Centrum oscillationis Coni.

Quod si A B C conus fuerit, omnia eodem modo se habebant, nisi quod spatium Z hic fit æquale rectangulo Δ P Φ *, hoc est ¼ quadrati P V vel B D, sive ⅛ quadrati B C. Quare, totum spatium appplicandum, in cono erit ⅜ quadrati A D, una cum ⅛ quadrati B C. Ac proinde, posita suspensione ex vertice A, fiet E S, quia centrum agitationis inferius est centro gravitatis, æqualis ⅔ A D, & ⅓ tertiæ proportionalis duabus A D, B C sive tota A S æqualis * A D, unacum ⅓ tertiæ proportionalis duabus A D, D B. Atque hinc manifestum est, si A D, D B æquales sint, hoc est, si conus A B C sit rectangulus, fieri A S æqualem axi A D. * Prop. 1.

Sequitur quoque porro, ex propositione 20, conum hunc rectangulum, si ex D centro basis suspendatur, stocaronam fore sibi aptè ex vertice A suspenso, quemadmodum & de triangulo rectangulo supra ostensum fuit.

Centrum oscillationis Sphæræ.

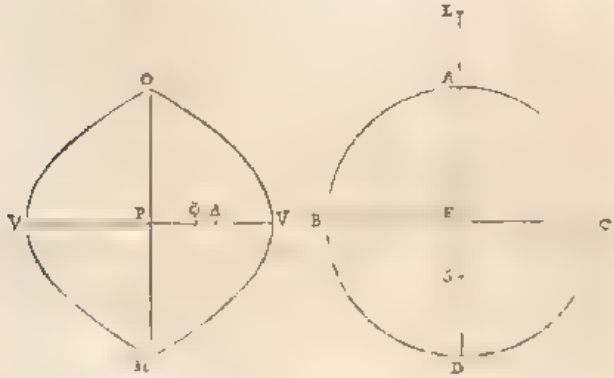
Si A D C sit sphæra, erit figura plana proportionalis, a latere adponenda, O V H, ex parabolis composita, quarum basis communis O H, æqualis sphæræ diametro A D. Secta vero sphæra planis per centrum E, quorum B C sit horizonti parallelum, A D vero verticale, ut inveniatur summa quadratorum a distantiis a plano A D, noscenda est distantia centri gr. parabolæ O V H ab O H, quæ sit Φ P, estque ⅜ V P. Deinde, divisa P V bifariam in Δ, constat rectangulum Δ P Φ, multiplex per numerum particularum sphæræ A B C, æquari quadratis distantiarum à plano A D * Est autem rectangulum Δ P Φ æquale ¼ quadrati P V, vel quadrati B E. * Trop. 1. in fine.

Atqui, quadrata distantiarum à plano B C, æqualia esse liquet quadratis distantiarum à plano A D, ac proinde eidem rectangulo Δ P Φ, multiplici per dictum particularum numerum. Ergo spatium applicandum, in sphæra A B C, erit duplum rectangulo Δ P Φ; ideoque æquale, quadrati à radio E B.

Itaque, si sphæra suspensa sit expuncto in superficie sua A, erit

De centro Oscillationis.

B S, à centro sphæræ B ad centrum agitationis S, æqualis ⅔ semidiametri A E. Totaque A S æqualis ⅔ diametri A D. Si vero ex puncto alio, ut I, sphæra suspensa sit, erit E S æqualis ⅔ tertiæ proportionalis duabus L E, E B.



Centrum oscillationis Cylindri.

In cylindro, invenimus spatium applicandum æquari ⅓ quadrati altitudinis, una cum ¼ quadrati à semidiametro basis. Vnde si cylindrus a centro basis superioris suspendatur, fit longitudo penduli isochroni æqualis ⅓ altitudinis, una cum semisse ejus, quæ sit ad semidiametrum basis ut hæc ad altitudinem.

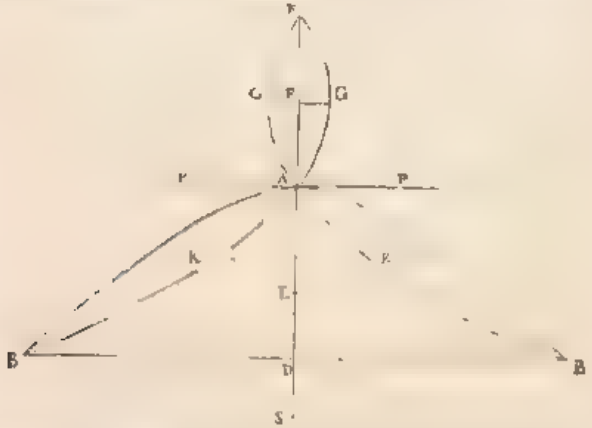
Centrum oscillationis Conoidis Parabolici.

In conoide parabolico, rectangulum oscillationis est ⅓ quadrati altitudinis, cum ⅕ quadrati à semidiametro basis. Vnde, si a puncto verticis fuerit suspensum, fit longitudo penduli isochroni ⅔ axis, cum ⅓ ejus quæ sit ad semidiametrum basis, sicut hæc ad axem, id est, una cum ⅓ lateris recti parabolæ genitricis.

Centrum oscillationis Conoidis Hyperbolici.

In conoide quoque hyperbolico centrum oscillationis inveniri potest. Si enim, exempli gratia, sit conoides cujus sectio per axem, hyperbola B A B, axem habens A D, latus transversum A F: erit figura plana ipsi proportionalis B K A K B, contenta basi B B,

& parabolicæ lineæ portionibus similibus A K B, quæ parabolæ per verticem A transeunt, axemque habent G E, dividentem bifariam latus transversum A F, ac parallelam basi B B. Et hujus quidem figuræ B K A K B, centrum gravitatis L, tantum distat à vertice A, quantum centrum gravitatis conoidis A B B, eiusque axis A D ad A L, sicut tripla F A cum dupla A D, ad duplam F A cum sesquialtera A D. Deinde & distantia centri gr. figuræ dimidiæ A D B K, ab A D, inveniri potest, atque etiam subcentrica cunei super figura B K A K B, abscissi plano per A P, parallelam B B; hujus inquam cunei subcentrica, super ipsa A P, inveniri quoque potest; atque ex his consequenter centrum agitationis conoidis, in quavis suspensione, dummodo axis, circa quem movetur, sit basi conoidis parallelus. Atque invenio quidem, si axis A D latori transverso A F æqualis ponatur, spatium applicandum æquari $\frac{1}{25}$ quadrati A D, cum $\frac{9}{25}$ quadrati D B. Tunc autem A L est $\frac{7}{9}$ A D. De centro Oscillationis.



Vnde, si conoides hujusmodi ex vertice A suspendatur, invenitur longitudo penduli isochroni, A S, æqualis $\frac{5}{11}$ A D, cum $\frac{11}{40}$ tertiæ proportionalis duabus A D, D B.

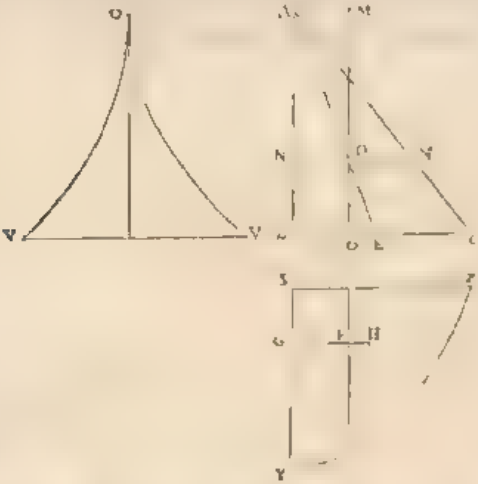
Centrum oscillationis dimidii Coni.

Denique & in solidis dimidiatis quibusdam, quæ fiunt sectione per axem, centrum agitationis invenire licebit. Vt si sit conus dimidiatus A B C, verticem habens A, diametrum semicirculi ba-

De centro Oscillationis

scos B C: ejus quidem centrum gravitatis D notum est, quoniam A D sunt rectæ A E, ita dividentis B C in E, ut, sicut quadrans circumferentiæ circuli ad radium, ita sint C B ad B F. Tunc enim E est centrum gravitatis semicirculi baseos, ideoque in A E centra gravitatis omnium segmentorum semiconi A B D, basi parallelorum.

Et figura quidem porro proportionalis a latere ponenda, O V V, eadem est quæ in cono toto supra descripta fuit, per quam nempe invenietur summa quadratorum, à distantiis particularum semiconi à plano horizontali N D, per centrum gravitatis ducto. Verum quadrata distantiarum, à plano verticali M D O, ut colligantur, altera quoque figura proportionalis S Y Z, sicut supra prop. 14 adhibenda est, cujus nempe sectiones verticales, exhibeant lineas proportionales sectionibus sibi respondentibus in semicono A B C



& majus figuræ cognoscenda est distantia centri gr. F ab S Y, quam æqualem esse constat distantiæ D N, centri gr. semiconi à plano trianguli A B. positaque H G subcentrica cunei abscissi super figura S Z Y, ducto plano per S Y, noscendum est rectangulum G F H, cujus nempe multiplex, secundum numerum particularum semiconi A B C, æquabitur quadratis distantiarum semiconi in planum M D O. Licebit vero cognoscere rectangulum illud G F H, etiamsi subcentricæ H G longitudo ignoretur, hoc modo.

Diximus supra, cum de cono ageremus, quadrata distantiarum à plano

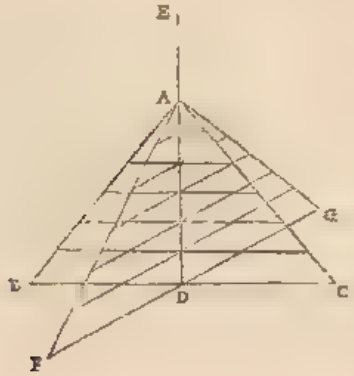
à plano per axem ejus, æquari $\frac{1}{10}$ quadrati à diametro basis, sive $\frac{1}{40}$ quadrati à semidiametro, multiplicis per numerum particularum coni totius. Unde & hic, in semicono A B C, quadrata distantiarum à plano A B æqualia erunt $\frac{1}{40}$ quadrati B C, multiplicis per numerum particularum ipsius semiconi. Sed & rectangulum H G F, multiplex per numerum particularum semiconi A B C, æquatur quadratis distantiarum à plano A B, ut patet ex propositione 9. Ergo rectangulum H G F æquale $\frac{1}{40}$ quadrati B C. Ponendo autem A B = a, B C = b, & quadrantem circumferentiæ, radio B C descriptæ, = q; fit E B = $\frac{bq}{4}$. Cujus cum N D tribus quartis æquetur, fiet proinde N D, sive G F = $\frac{3bq}{16}$. Cujus quadratum auferendo à rectangulo H G F, quod erat $\frac{1}{40}$ quadrati B C, fiet rectangulum G F H = $\frac{1}{40}bb - \frac{9bbqq}{256}$. Hoc autem rectangulum, multiplex per numerum particularum semiconi A B C, æquatur quadratis distantiarum a plano M D O. At quadratis distantiarum à plano M D æquantur, ut in cono, $\frac{1}{10}$ quadrati A B, sive $\frac{1}{10}aa$, multiplices per numerum particularum semiconi A B C. Itaque, totum spatium applicandum, æquabitur hic $\frac{1}{10}aa + \frac{1}{40}bb - \frac{9bbqq}{256}$.

Unde quidem centrum agitationis invenitur in omni suspensione semiconi, dummodo ab axe qui sit parallelus basi trianguli à sectione A B. Notandum vero, cum figura S Z Y sit signata prorsus naturæ, subcentricam tamen G H, cadere super ipsa abscissi plano per S Y, hinc invenitur. Nam, quia rectangulum H G F æquale erat $\frac{1}{40}bb$, sive quadrati B C, & G F æqualis $\frac{3bq}{16}$, fit inde G H æqualis $\frac{bq}{6}$.

Porro, etiam semicylindri, & semiconoidis parabolici, centra agitationis invenirii possunt, atque aliorum insuper semisolidorum; quæ alius investiganda relinquimus.

Quemadmodum autem in figuris planis, ita & hic in solidis figuris locum habet, quod de obliquarum centris agitationis illic diximus, quæ veluti luxatione rectarum constituuntur, quarum centra oscillationis non differunt à centris oscillationis rectarum. Sic, si coni duo fuerint A B C, A F G, alter rectus, alter scalenus, quorum & diametri & bases æquales, hi ex vertice suspensi, vel a quibuscunque axibus, æqualiter à centris eorum gravitatis distantibus, isochroni erunt; dummodo axis, unde conus scalenus suspensus est, rectus sit ad planum trianguli per diametrum, quod planum basi est ad angulos rectos.

De centr. Oscillationis.



PROPOSITIO XXIII.

Horologiorum motum temperare, ad lito pondere exiguo secundario, quod super virga pendulo, certa ratione divisa, sursum deorsumque moveri possit.

Vt hoc expediamus, primo pendulo ipsius, ex virga gravitate praecipua, & appenso parte una pondere, composito, centrum oscillationis inveniendum est.

Sit virga, cum appenso pondere, A C, cujus longitudo dicatur *a*

Intelligantur autem, tum virga ipsa, tum pondus appensum C, in particulas minimas æquales divisa, earumque particularum virga habeat numerum *b*, pondus vero C numerum *c*, ponendo nempe *b* ad *c*, sicut gravitas virgæ ad gravitatem appensi ponderis. Longitudo igitur pendulo simplicis, dato isochrono, habebitur, si summa quadratorum a distantiis particularum omnium à puncto suspensionis A, dividatur per summam earundem distantiarum * Secetur A C bifariam in M, tum vero in T, ut A T sit dupla T C. Quia ergo M est centrum gravitatis lineæ A C, & A T subcentrica cunei super ipsa abscissi plano per A D, perpendiculari ad A C, qui cuneus hic revera triangulum est, erit summa quadratorum, a distantiis particularum virgæ à puncto A,

æqualis rectangulo A M T, una cum quadrato A M, hoc est, rectangulo T A M, multiplici secundum numerum particularum b, hoc est, aab, quia M A est a, & T A a, ac proinde rectangulum T A M aa. Summa vero quadratorum, à distantiis particularum ponderis C ab eodem puncto A, æquabitur quadrato A C, multiplici secundum numerum particularum ipsius ponderis, hoc est, aac. Adeoque summa quadratorum omnium, tam à distantiis particularum virgæ, quam ponderis C, erit $aab + aac$ De centro Oscillationis.

Porro, distantiæ omnes particularum virgæ A C à puncto A, æquantur ba, longitudini scilicet virgæ ipsius, quæ est a, multiplici secundum semissem numeri particularum quas continet. Et distantiæ omnes particularum ponderis C, ab eodem puncto A, sunt ac. Ita ut summa utrarumque distantiarum sit $ab + ac$. Per quam dividendo summam quadratorum prius inventam, $aab + aac$, fit $\frac{aab + aac}{ab + ac}$ sive $\frac{a + ac}{b + c}$, longitudo penduli isochroni.

Quæ itaque habebitur, si fiat, ut dimidia gravitas virgæ, una cum gravitate appensi ponderis, ad trientem gravitatis virgæ, una cum gravitate ejusdem appensi ponderis, ita longitudo A C ad aliam. Oportet autem sumere longitudinem A C, à puncto suspensionis A ad centrum gravitatis ponderis C, cum magnitudinis ejus ratio hic non considerata, ac veluti minimum consideretur.

Quod si jam, præter pondus C, alterum insuper D virgæ inhæreret interpolatur, cujus gravitas, seu particularum numerus sit d, distantia vero A D sit f. Ut pendulum simplex hac ita compositum isochronum inveniatur, addenda sunt ad summam superiorem quadratorum, quadrata distantiarum particularum ponderis D a puncto A, quæ quadrata apparet esse dff. Adeo ut summa omnium jam sit futura $aab + aac + ffd$. Item, ad summam distantiarum, addendæ distantiæ particularum ponderis D, quæ faciunt df. Ac summa proinde distantiarum omnium erit $ba + ca + df$, per quam dividenda est ista quadratorum summa, & fit $\frac{aab + aac + ffd}{ab + ac + df}$, longitudo penduli isochroni.

Quod si vero, hæc longitudo penduli isochroni, data æqualis postulatur, quæ sit p, & reliqua omnia quæ prius data sint, præter

De centro Oscillationis

distantiam A D seu f, quæ determinat locum ponderis D: sitque inveniendæ hæc distantia, id fiet hoc modo. Nempe, cum postuletur $\frac{aac+aa+ff}{a+a+f}$ æquale p, orietur ex hac æquatione $ff = pf + \frac{abp+cap}{a} - \frac{aab+aac}{a}$. Et $f = \frac{1}{2}p + \text{vel} - \sqrt{\frac{pp}{4} + \frac{abp+cap}{a} - \frac{aab+aac}{a}}$. Vbi animadvertendum, duas esse veras radices, si $abp + cap$ minus sit quam $aab + aac$; hoc est, si longitudo p minor sit quam $\frac{ab+ac}{a}$, quæ antea inventa fuit longitudo penduli isochroni, sive distantia centri oscillationis à suspensione, in pendulo composito ex virga A C & pondere C.

Vnde patet, si velimus efficere, ut, applicato pondere D, acceleretur penduli motus, posse duobus locis, inter A & C, illud disponi, quorum utroliber eadem celeritas pendulo concilietur: velut in D vel E. Quæ loca æqualiter distabunt à puncto N, quod abest ab A, semisse longitudinis p, hoc est, semisse penduli simplicis, cui compositum hoc isochronum postulabatur. Apparet autem, quando hæc longitudo p tantum exiguo minor ponitur quam A C, etiam punctum N exiguo superius esse puncto medio virgæ A C.

Porro, ex æquatione superiori, $f = \frac{p}{2} + \text{vel} - \sqrt{\frac{pp}{4} + \frac{abp+cap}{a} - \frac{aab+aac}{a}}$ habetur determinatio longitudinis p. Patet enim, $\frac{pp}{4} + \frac{abp+cap}{a} - \frac{aab+aac}{a}$ non minus esse debere quam $\frac{aab+aac}{a}$. Vnde non debebit esse minor quam $\frac{1}{2}\sqrt{bd + 4cd + bb + 4bc + 4cc - \frac{ab+ac}{a}}$. Quod si p æquetur huic quantitati, hoc est, si $\frac{pp}{4} + \frac{abp+cap}{a} - \frac{aab+aac}{a}$ fuerit æquale $\frac{aab+aac}{a}$, erit jam, in eadem superiori æquatione, $f = \frac{1}{2}p$, hoc est, $\frac{1}{2}\sqrt{bd + 4cd + bb + 4bc + 4cc - \frac{ab+ac}{a}}$. Quo determinatur distantia ponderis D à puncto A, ex qua maxime omnium accelerat motum penduli.

Atque hæc ad horologiorum usum sic porro adhibentur. Sit, exempli gratia, pendulum horologii, quod singulis oscillationibus scrupula secunda notet. Virgæ autem gravitas sit $\frac{1}{2}$ gravitatis appensi ponderis in uno pendulo: &, præter hoc, sit aliud exiguum pondus mobile secundum virgæ longitudinem, cujus gravitas ea-

dem ponatur quæ ipsius virgæ. Quæritur jam, quo loco hoc virgæ imponendum, ut uno scrupulo primo acceleretur horologii motus, spatio 24 horarum. Item, ubi collocandum, ut duorum scrupulorum primorum fit acceleratio, item, ut trium, quatuor, atque ita porro. De centro Oscillationis.

Ductis viginti quatuor horis sexagies, fiunt 1440, quot nempe scrupula prima una die continentur. Ex his unum aufer, quando unus scrupulus accelerationem quæritur: supersunt 1439. Ratio autem 1440 ad 1439 duplicata, proxime est ea quæ 1440 ad 1438. Ergo, si penduli simplicis, secunda scrupula notantis, longitudo divisa intelligatur in partes æquales 1440, earumque 1438 alii pendulo tribuantur, hoc præcedet alterum illud, in 24 horis, uno scrupulo primo. Adeo ut hic p valeat partes 1438.

Quia autem pendulum horologii, ex virga metallica & pondere appenso compositum, isochronum ponitur pendulo simplici partium 1440, inveniendæ primum est virgæ ipsius longitudo, ex æquatione superius posita. Erat nempe $\frac{ab+cf}{b+c}$ æquale longitudini pendulii simplicis, quod isochronum composito ex virga habente longitudinem a, gravitatem b, & pondere affixo cujus gravitas c. Ergo si longitudo pendulii simplicis isochroni x ponatur f. Erit $\frac{\frac{1}{2}bf+cf}{\frac{1}{2}b+c} = x$ positoque, ut hic, $c = 50$; $b = 1$, $f = 1440$, fiet $x = 1444\frac{4}{5}$, longitudo virgæ.

Iam, quia erat $f = \frac{1}{2}p + \text{vel} - \sqrt{\frac{1}{4}pp - \frac{\text{[illegible]}}{\text{[illegible]}}}$, fiet $f = \frac{1}{2}p + \text{vel} - \sqrt{\frac{1}{4}pp + 72962p - 1050612 10}$. Vide porro, si p sit, uti diximus, partium 1438, invenietur $f = 1331\frac{\text{[illegible]}}{\text{[illegible]}}$, qualium nempe f, seu pendulum simplex, secunda scrupula oscillationibus designans, continet 1440. Cujus longitudo si pedum trium statuatur, quos horarios vocavimus, habebit f uncias 33, & 3 unciarum uncias, quas lineas vocant. Vel, auferendo hanc longitudinem f a tota trium pedum longitudine, supererunt unciæ duæ, lineæ 9, a centro oscillationis pendulii compositi sumendæ, ut habeatur locus ponderis D, unius scrupuli primi accelerationem præstans tempore 24 horarum. Eodem modo reliquas distantias, quibus virga dividenda est, calculo investigavimus, aliam atque aliam ponendo longitudinem p: easque subjecta tabella exhibe

De centro Oscillationis

mus, secundum cujus numeros etiam virga penduli divisa est, quæ superius in descriptione horologii fuit exhibita. Procedunt autem accelerationes diurnæ, ut jam illic advertimus, per 15 scrupula secunda, seu primorum scrupulorum quadrantes. Ex gr si, pondere mobili D hærente in parte 73, 4, inveniatur horologium tardius justo incedere, in 24 horis, differentia 15 secundorum scrupulorum; oportebit sursum adducere pondus D, usque ad numerum 85,6, ut corrigatur.

Accelerata horologii spatio 24 horarum.	Pedes, à centro oscillationis accipiendi.
Scrup. pr. Sec.	Linea & decimæ linearum pedis Parisiensis.
0, 15	7,0
0, 30	15, 1
0, 45	23, 7
1, 0	32, 6
1, 15	41, 9
1, 30	51, 7
1, 45	62, 2
2, 0	73, 4
2, 15	85, 6
2, 30	99, 0
2, 45	114, 1
3, 0	131, 8
3, 15	154, 3
3, 30	192, 6

Centrum oscillationis altius est centro gravitatis c partibus 1, 4.

PROPOSITIO XXIV.

Centri oscillationis rationem haberi non posse, in pendulis inter Cycloides suspensis; & quomodo hinc orta difficultas tollatur.

Si quis, subtili examine, contulerit ea quæ in superioribus, de pendulo inter cycloides suspenso, demonstravimus, cum his quæ ad centrum oscillationis pertinent; videbitur ei deesse aliquid ad perfectam illam, quam præferimus, oscillationum æqualitatem. Ac primo dubitabit, an, ad inveniendum circulum cycloidis genitorem, penduli longitudo accipienda sit à puncto suspensionis ad

centrum gravitatis appensi plumbi, an vero ad centrum oscillationis, quod, ab altero illo, sæpe sensibili intervallo distat, atque eo majore, quo major fuerit sphæra aut lens plumbea. Quid enim, si sphæræ diameter quartam, aut tertiam partem, pendali longitudinis æquet? Quod si ad centrum oscillationis illam longitudinem accipiendam dicamus, non tamen expediet quo pacto ea, quæ de centro oscillationis ostensa sunt, conveniant pendulo continue longitudinem suam immutanti, quale illud quod inter cycloides movetur. Posset enim videri, etiam centrum oscillationis mutari, ad singulas diversas longitudines, quod tamen hoc modo intelligendum non est. Res sane explicatu difficillima, si omnimodam ἀκριβειαν spectemus. Nam in demonstratione temporum æqualium in cycloide, mobile, per eam delatum, ve uti punctum gravitate præditum consideravimus. Sed, si ad effectum spectemus, non magni faciendæ est difficultas hæc, cum ponderis, quo pendulum conflatur, magnitudo in horologiis tanta non requiratur, ut si quo majus eo melius, ut differentia centrorum gravitatis, & oscillationis, aliquid hic turbare possit. Quod si tamen effugere protius his tricas velimus, id ita consequemur, si sphæram aut ve pendali, circa axem tum horizontalem, mobilem efficiamus: axis extrema utrinque, virgæ pendali imæ, inserendo: quæ idcirco ut bifida hac parte sint necesse est. Fit enim hoc modo, ex motus natura, ut eandem, respectu positionem, respectu horizontalis plani, sphæra pendali servet, atque ita puncta ejus quævis, æque ac centrum ipsum, cycloides eandem percurrant. Vnde cessat hic jam centrorum oscillationis consideratio, nec tantus perfectam temporum æqualitatem in tale pendulum consequitur, quam si pondo unico omnis ejus gravitas contineretur.

De centro Oscillationis.

PROPOSITIO XXV.

De mensura universalis, & perpetua, constituenda ratione.

Certa, ac permanens magnitudinum mensura, quæ nullis casibus obnoxia sit, nec temporum injuriis, aut longinquitate aboleri aut corrumpi posit, res est & utilissima, & a multis pridem quæsita. Quæ si priscis temporibus reperta fuisset, non tam perplexæ nunc forent, de pedis Romani, Græci, Hebraique veteris modulo, disceptationes. Hæc vero mensura, Horologii nostri opera, facile constituitur, cum Lue illo nequaquam, aut ægre admodum, ha-

De centro Oscillationis

beri possit. Etsi enim, simplici pendulorum oscillatione, hoc à quibusdam tentatum fuerit, numerando recursus qui tota cæli conversione continentur, vel parte ejus cognita, per fixarum stellarum distantias, secundum ascensionem rectam, nec certitudo eadem hoc modo, quæ adhibitis horologiis, contingit, & labor longe est molestissimus ac tædiosissimus, propter numerandi solicitudinem. Quia autem, præter horologia, aliquid, ad exactissimam hujus mensuræ inquisitionem, etiam centrorum oscillationis notitia confert, ideo hic demum, post eorum tractationem, hanc determinationem subjicimus.

Aptissima huic rei sunt horologia, quorum oscillationes singulæ secunda scrupula, vel eorum semisses, notant, quæque indicibus etiam, ad ea demonstranda, instructa sunt. Postquam enim, ad mediocrem dierum longitudinem, ejusmodi horologium, fixarum stellarum observationibus, compositum fuerit, methodo illa quam in horologii descriptione ostendimus: aliud pendulum simplex, hoc est, sphæra plumbea, aut alia materia gravi constans, ex tenui filo resigata, juxta suspendenda est, motuque exiguo impellenda, ac tantisper producenda, aut contrahenda fili longitudo, donec recursus ejus, per quadrantem horæ, aut semissem, una ferantur cum reciprocationibus pendulii horologio aptati. Dixi autem exiguo motu impellendum pendulum, quia oscillationes exiguæ, puta 5 vel 6 partium, satis æqualia tempora habent, magnæ vero non item. Tunc, acceptâ mensura distantiæ, a puncto suspensionis ad centrum oscillationis penduli simplicis, eaque, si recursus singuli scrupula secunda valeant, in tres partes divisa, facient hæ singulæ longitudinem pedis, quem HORARIUM in superioribus vocavimus: quique, hoc pacto, non solum ubique gentium constitui possit, sed & venturo ævo redintegrari. Adeo ut & moduli pedum omnium aliorum, semel ad hunc proportionibus suis expressi, certo quoque in posterum cognosci possint. Sicut jam supra, pedem Parisiensem ad hunc horarium esse diximus, ut 864 ad 881, quod idem est ac si, posito prius pede Parisiensi, dicamus tribus hujusmodi pedibus, cum octo lineis & dimidia, constitui pendulum simplex, cujus oscillationes scrupulis secundis horarius responsuræ sint. Pes autem Parisiensis ad Rhenanum, quo in patria nostra utuntur, se habet ut 144 ad 139, hoc est, quinque lineis suis diminutus, alterum illum relinquit. Atque ita & hic pes, & alii quilibet, perpetuo duraturas mensuras accipiunt.

Quomodo autem centrum oscillationis in sphæra, ex qualibet longitudine

longitudine suspensi, inveniatur, in superiori libro demonstratum est. Nempe, si hæc ut distantia inter punctum suspensionis & sphæræ centrum, ad semidiametrum ejus, ita hæc ad aliam, cujus duris quintas, a centro deorsum acceptas, terminari ita quadrato oscillationis a centro. Facile autem apparet cur necessaria sit hujus centri consideratio, ad accuratam pedis Horarii constructionem. Nam, si a puncto suspensionis ad sphæræ centrum distantia accipiatur, sphæræ autem magnitudo non determinatur proportione ad hujus longitudinem, non erit certa mensura pendulum cujus recursus secundas scrupulas metiatur, sed quo major erit ejus sphæra, hoc minor inveniretur mensura illi, inter centrum sphæræ & punctum suspensionis intercepta. Quia in horariis pendulis, centra quidem oscillationis a punctis suspensionum æqualiter distant, amplius autem descendit centrum oscillationis infra centrum sphæræ majoris, quam minoris.

Hinc necessitate illis, qui, ante hanc centri oscillatorii determinationem, mensuram universalis constituendæ rationem tenuerunt, quod, jam inde a prima Horologii nostri inventione, nostra illa societas Regia Anglicana sibi negotium sumpsit, & recentius doctissimus Astronomus Lugdunensis, Gabriel Mouttonus, his, aliquam, necesse fuit designare globuli suspensi diametrum, vel proportione certa ad filii longitudinem, cujus nempe tricesimam vel aliam partem æquaret, vel mensura qua hanc cognita, ut digitus vel pollex. Sed hoc posterior modo, ponitur jam certi aliquid, quod id ipsum est quod quærendum est: certa scilicet via sensibilem errorem fore, dum non sphæræ illam, quam jam dixi, magnitudinem non minorem excedant. Priore autem modo posset quidem hujusmodi pactorum res explicari, sed ita, ut numerandarum oscillationum labor subeundus sit, ratiocinioque etiam utendum. Quamobrem præstat, centra oscillationis indagando, certam rationem sequi, nulliusque præter necessitatem legibus obligari, atque hic jam majoribus sphæris quam exiguis pedibus utendum, quod illæ occasionem aeris minus impediantur.

Cæterum, non sphæræ tantum ex filo suspensæ, sed & cono, cylindri, aliaque omnia rotunda, planaque, quorum centra oscillationis superius exhibimus, ad hanc mensuram investigandam apta sunt, quoniam, a puncto suspensionis ad centrum oscillationis, certum idemque omnibus horariis pendulis est intervallum. Neque et ab illa dumtaxat horologia, quæ secunda scapula in eorum semisses singulis pendulii recursibus indicant, ad hæc utur-

De certitudine Oscillationum.

pare possumus, sed & aliâ quâcunque pendul. longitudine instructis propositum obtinebitur, dummodo ex rotarum proportionibus, seu dentium numero, cognoscatur numerus oscillationum certo tempore peragendarum. Invento enim pendulo simplici, cujus librationes singulæ conveniant vel singulis, vel binis, seu tribus recursibus horologii, constabit jam hinc, quot penduli illius vices horæ spatio transigantur. Quarum numerus si quadretur, erit ut quadratum 3600, numero scrupulorum secundorum horam unam efficientium, ad quadratum illius numeri, ita longitudo penduli simplicis inventi, (quæ longitudo semper a puncto suspensionis ad centrum oscillationis accipienda est) ad longitudinem penduli illius horarii tripedalis, quod diximus. Hoc enim inde constat, quod duorum quorumvis pendulorum longitudines sunt inter se, sicut quadrata temporum quibus singulæ oscillationes transeunt, ideoque contrariam rationem habent quadratorum a numeris, quos efficiunt oscillationes æqualibus temporum intervallis peractæ. Nam, cum hactenus experientiâ tantum comprobatum fuerit Theorema illud, de pendulorum longitudinibus, eas nempe duplicatam habere rationem temporum, quibus oscillationes singulæ peraguntur, nunc ejus demonstratio ex superius traditis manifesta est. Cum enim ostendimus, singulos recursus penduli, inter cycloides suspensi ad aliam perpendicularem, e dimidia penduli longitudine, eandem rationem habere, cum scilicet quam circuli secantia circuli ad diametrum suam, facit hinc colligitur, tempora oscillationum in duobus pendulis esse inter se, sicut tempora descensus perpendicularis ex dimidiis eorum altitudinibus. Quæ altitudines dimidiæ, sive earum totæ, cum habeant rationem duplicatam temporum, quibus ipsæ descensu perpendiculari percurruntur *, eadem quoque duplicatam rationem habebunt temporum, quæ oscillationes singulas metiuntur. Ab oscillationibus autem minimis penduli, inter cycloides suspensi, non differunt sensibiliter oscillationes minimæ penduli simplicis, cujus eadem sit longitudo. Itaque & pendulorum simplicium longitudines, duplicatam rationem habebunt temporum, quibus oscillationes minimæ transiguntur.

Quod si quis oscillationum numerandarum, quæ horæ aut semihoræ tempore transeant, laborem non detrectat, horologium quæ adsit, cujus index secunda scrupula demonstret, quæque inque accommodatur pendulo simplicis longitudo, cujus numerus oscillationum, quæ hora una continentur, hoc modo cognoscetur, atque inde longitudo penduli tripedalis, ad secunda scrupula, ut antea, calculo prodibit.

PROPOSITIO XXV.

De circulo oscillationis.

Spatium definire, quod gravia, perpendiculariter cadentia, dato tempore percurrunt.

Hanc mensuram quicunque hactenus investigarunt, experimenta contulere necesse habuerunt; quibus, prout hactenus instituta fuere, non facile ad exactam determinationem perveniretur, propter velocitatem cadentium, sub finem motus acquisitam. Ex nostra autem prop. 25, de Descensu gravium, cognitaque longitudine penduli ad secunda scrupula, absque experimento, per certam consequentiam, rem expedire possumus. Ac primo quidem spatium illud inquiremus, quod unius scrupuli secundi tempore grave praeterlabitur, ex quo quaelibet alia deinde colligere licebit. Quia igitur penduli, ad secunda scrupula, longitudinem diximus esse pedum Horatorum 3; tempus autem unius oscillationis minimae, est ad tempus descensus perpendicularis ex dimidia penduli altitudine, ut circumferentia circuli ad diametrum, hoc est, ut 355 ad 113; si fiat, ut numerus horum prior ad alterum, ita tempus unius secundi scrupuli, sive sexaginta tertiorum, ad aliud, fient 19'''', tempus descensus per dimidiam penduli altitudinem, quae nempe est pedis unciarum 18. Sicut autem quadrata temporum, ita sunt spatia illis temporibus peracta, quemadmodum superiori propositione fuit ostensum. Ergo, si fiat ut quadratum ex 19 ad quadratum ex 60, hoc est, ut 3648 ad 3600, ita 18 unciae ad aliud, fient ped. 14 unc. 9 lin. 6, altitudo descensus perpendicularis, tempore unius secundi. Cum autem pes Horatius sit ad Parisiensem, ut 881 ad 864, erit eadem altitudo, ad hanc mensuram reducta, proxime pedum 15 & unciae unius. Atque haec cum accuratissimis experimentis nostris prorsus conveniunt: in quibus punctum illud temporis, quo casus finitur, non aurium aut oculi judicio discernitur, quorum neutrum hic satis tutum est, sed spatium descendendo peractum, alio modo, quem hic exponere tentabimus, absque ullo errore cognoscitur.

Pendulo, ad parietem tabulamve erectam, suspensi dimidia oscillatio moram temporis, cadendo absumpti, indicat. Cujus sphaerula, ut eodem momento ac plumbum casui destinatum dimittatur, utraque filo tenui connexa tenentur, quod admoto igne incidetur. Sed prius, casuro plumbo, funiculus alius adnectitur, ejus longitudinis, ut, cum totus exierit à plumbo tractus, nondum ad pa-

DE CENTRO OSCILLATIONIS

rietem illidatur pendulum. Funiculi ejus caput alterum, regulæ chartaceæ, aut ex tenui membrana paratæ, cohæret, ita ad parietem tabulamve applicatæ, ut trahentem funem facile sequi possit, rectaque secundum longitudinem suam descendere; eo scilicet transiens, quo pendulæ sphæra ad tabulam accidet. Abrumpto igitur funiculo toto, pars insuper regulæ deorsum trahitur a cadente plumbo, priusquam pendulum ad tabulam perringat. Quæ quanta sit pars, sphæra fuligine leviter infecta, regulamque præterlabentem signans, indicat. Huic autem addita funiculi longitudine, spatium cadendo emensum certo definitum habetur.

Aeris autem occursum, quasi nullus esset in his intelligimus, ut mensura cadentibus corporibus præfixa cum experimentis exacte contentiat. Nec sane tantus est ille, ut in altitudinibus nostis, quo ascendere datur, sensibile discrimen inducere possit, dummodo solida corpora è metallo, aut, si leviore materia constent, mole grandiuscula accipiantur. Levitas enim materiæ, in iis quæ cadendo aerem secant, ita magnitudine corporis pensatur, ut sphæra lignea, vel etiam è subere formata, parta faciat cum plumbea, quando nimirum diameter harum ad plumbeæ diametrum eam rationem habuerit, quam gravitas plumbi propria ad ligni suberisve gravitatem. Tunc enim gravitates sphærarum erunt inter se sicut earum superficies. Veruntamen, ut æquali celeritate, quantum sensu percipi potest, decidant corpora, quæ multum intrinseca gravitate differunt, nequaquam opus est ut proportio illa diametrorum servetur. Possunt enim inter se æqualia esse, dummodo utraque satis magna sint, aut ex non nimia altitudine decidant. Etenim illud quoque hic animadvertendum est, tantam vel altitudinem esse posse; vel, in mediocri etiam altitudine, tantam projecti corporis levitatem, ut ob aeris renitentiam, acceleratio motus tandem ab illa, quam in superioribus demonstravimus, proportione plurimum recessura sit. Namque in universum, corpori cuilibet, per aerem aliudve liquidum labenti, certus celeritatis modus, pro ratione ponderis ac superficiei suæ, constitutus est, quem excedere, aut potius ad quem pervenire nunquam possit. Quæ nempe celeritas ea est, quam si aer, aut liquor ille sursum tendens, haberet, suspensum corpus idem sibi innatans sustinere posset. Verum de his, alias fortasse, pluribus agendi occasio erit.

HOROLOGII OSCILLATORII

PARS QUINTA.

Constructionem aliam, è circulari pendulorum motu deductam, continens; & Theoremata de Vi Centrifuga.

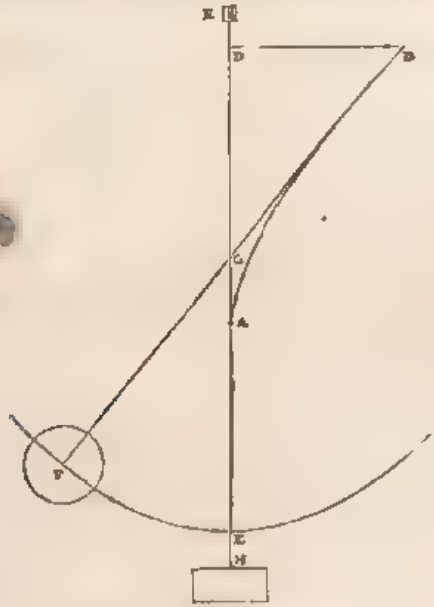
EST & aliud Oscillatorii motus genus, præter id quod hactenus pertractavimus. Ejusmodi nempe, quo, per circuli ambitum, pendulum pondus circumfertur. Unde aliud quoque horologii commentum deduximus, eodem fere tempore quo prius illud, certoque itidem æquabilitatis principio nixum, sed cujus usus minus pereebuit, propter alterius illius constructionem, quodammodo simpliciorem facilioremque. Plura tamen hujus quoque generis de quo nunc loquimur, nec sine successu, constructa fuere: estque in his singulare illud, quod continuo atque æquabili motu circumferri cernitur index postremus, qui secunda scrupula designat, cum in priore nostro horologio, omnibusque aliis, tota rim quasi feratur. Item hoc quoque, quod absque strepitu, sonoque omni, moveantur hac ratione constructa automata. quanquam, ad observationes astronomicas, sonus ad singula secunda scrupula repetitus, utilitate non carent. Et constituveram quidem, descriptionem horum cum iis demum edere, quæ ad motum circularem & Vim Centrifugam, ita enim eam vocant liberi, attinent, de quo argumento plura dicenda habeo, quam quæ hoc tempore exequi vacet. Sed, ut nova nec inutili speculatione maturius fruantur harum rerum studiosi, neve casu aliquo intercidat, hanc quoque partem, præter destinatum, cæteris adjunxi, qua machinæ hujus fabrica breviter exponitur, simulque Theoremata traduntur, ad vim centrifugam pertinentia, demonstratione ipsorum in aliud tempus dilata.

Horologii secundi constructio.

Non necessarium duxi, ut rotarum, quibus interiora horologii constant, dispositionem hic exhiberem, cum ea ab artificibus fa-

SECUNDI HOROLOGII DESCRIPTIO.

cile ordinari, varisque modis mutari possit; sed eam partem explicari satis esse, quæ motum ejus certa ratione moderatur. Cujus partis hic figura expressa est.



Axis D H ad horizontem erectus intelligendus est, ac super polis duobus mobilis. Huic ad A affixa est lamina, latitudine aliqua prædita, curvataque secundum lineam A B, quæ est paraboloides illa de qua ostendimus, propos. 8. partis 3, evolutione ejus, postquam ipsi recta quædam juncta fuerit, describi parabolam. Ea recta hic est A E; parabolam vero, ex evolutione totius B A B descriptam, refert linea B F. Filum curvæ B A applicatum, cujus extremo puncto parabola describitur, est B G F. Pondus illi affixum F. Dum autem axis D H in sese vertitur, filum B G F, in rectam lineam extensum, sphærulam F una circumducit, ita ut circulos horizonti parallelos percurrat, qui majores minoresve erunt, prout majori aut minori vi axis D H, ab rotis horologii in tympanidium K agentibus, incitabitur: sed ita, ut omnes in superficie conoidis paraboli ci contineantur. Atque hoc ipso æqualia semper circuitus tempo-

ra evident, ut ex iis, quæ de hoc motu postea dicemus, apparebit.

Quod si circuitus singulos, secundorum scrupulorum semiles [illegible] notare velimus, oportet latus rectum parabolæ E F esse 4 lineas [illegible] pedis Horarii nostri, hoc est dimidiam longitudinis pendali, cujus singulæ oscillationes semiscrupulum secundum impendere rent. Ex parabolæ autem latere recto, pender magnitudo lateris re & paraboloidis A B; quippe quod ipsius ÷ continet: atque item longitudo A E, quæ lateris recti parabolæ dimidium est. Si vero secunda scrupula unoquoque circuitu expleri desideremus, quadrupla priorum accipienda sunt, tum latera recta, tum linea A E.

Porro, etsi filum B G F velari unicum ac simplex hactenus designavimus, sciendum tamen longe præstare ut parte superiori duplex sit, ac versus F in angulum cocat, 20 vel 30 partium. In quem finem & laminæ A B latitudo ad B tanta esse debet, quanta illi filorum divaricationi sufficit, vel & ipsa bifida facienda. Hoc pacto enim motus circularis ponderis F, absque alio alio adminiculo, continuatur, ac filum utrumque sibi annexum in rectum extendit, quod non faceret, si un cotantum filo teneretur. Ubi tamen vim illam ab horologiatoris, vel pondere vel alia potentia motus, ad continuationem hujus motus circularis requiri sciendum. Quæ nempe vis per tympanidium K ad axem K H pervenit, ac minimo nitu, motum sphæræ F semel inditum, conservat.

Hoc autem quo facilius possit, liberrimam axis K H revolutionem esse oportet. Quod nulla ratione melius perficiemus compertum, quam si parte sui una, durato chalybe constet, suppositamque habeat adamantis superficiem planam, cujus minima quævis particula hic sufficit, subter laminam perforatam collocanda.

Cæterum in locum fili B C F, qua parte curvæ A B applicari debet, catenulam tenuem ex auro, aliove metallo, adhibere licebit, quo melius invariata servetur longitudo. Atque hoc in priore quoque horologio, ubi pendulum inter cycloides suspensum est, experti sumus. Sed ibi flexus catenulæ continuus, attritu annulorum, perexiguo licet, non parum impedit liberam pendali agitationem.

DE VI CENTRIFVGA ex motu circulari, Theoremata.

I.

Si mobilia duo æqualia, æqualibus temporibus circumferentias inæquales percurrant, erit vis centrifuga in ma-

De vi Centrifuga

jori circumferentia, ad eam quæ in minori, sicut ipsæ inter se circumferentiæ, vel earum diametri.

II.

Si duo mobilia æqualia, æquali celeritate ferantur, in circumferentiis inæqualibus; erunt eorum vires centrifugæ in ratione contraria diametrorum.

III.

Si duo mobilia æqualia in circumferentiis æqualibus ferantur, celeritate inæquali, sed utraque motu æquabili, qualem in his omnibus intelligi volumus; erit vis centrifuga velocioris, ad vim tardioris, in ratione duplicata celeritatum.

IV.

Si mobilia duo æqualia, in circumferentiis inæqualibus circumlata, vim centrifugam æqualem habuerint; erit tempus circuitus in majori circumferentia, ad tempus circuitus in minori, in subdupla ratione diametrorum.

V.

Si mobile in circumferentia circuli feratur ea celeritate, quam acquirit cadendo ex altitudine, quæ sit quarta parte diametri æqualis; habebit vim centrifugam sive gravitati æqualem; hoc est, eadem vi funem quo in centro detinetur intendet, atque cum ex eo suspensum est.

VI.

In cava superficie conoidis parabolici, quod axem ad perpendiculum erectum habeat, circuitus omnes mobilis, circumferentias horizonti parallelas percurrentis, sive parvæ sive magnæ fuerint, æqualibus temporibus peragentur, quæ tempora singula æquantur binis oscillationibus pendulæ, cujus longitudo sit dimidium lateris recti parabolæ genitricis.

VII.

Si mobilia duo, ex filis inæqualibus suspensa, gyentur ita ut circumferentias horizonti parallelas percurrant, capite altero filii immoto manente; fuerint autem conoidum, quorum superficiem fila hoc motu describunt, altitudines æquales; tempora quoque circulationum æqualia erunt.

VIII

VIII.

Si mobilia duo, uti prius, motu conico gyrentur, filis æqualibus vel inæqualibus suspensa; fuerintque conorum altitudines inæquales; erunt tempora circulationum in subduplicata ratione ipsarum altitudinum.

IX.

Si pendulum, motu conico latum, circuitus minimos faciat; eorum singulorum tempora, ad tempus casus perpendicularis ex dupla pendulæ altitudine, eam rationem habent, quam circumferentia circuli ad diametrum: ac proinde æqualia sunt tempori duarum oscillationum lateralium, ejusdem penduli, minimarum.

X.

Si mobile in circumferentia feratur, circuitusque singulos absolvat eo tempore, quo pendulum, longitudinem semidiametri circumferentiæ ejus habens, motu conico circuitum minimum absolveret, vel duplicem oscillationem minimam lateralem: habebit vim centrifugam suæ gravitati æqualem.

XI.

Penduli cujuslibet, motu conico lati, tempora circuitus æqualia erunt tempori casus perpendicularis, ex altitudine penduli filo æquali; cum angulus inclinationis fili, ad planum horizontis, fuerit partium 2. scrup. 54, proxime. Exacte vero, si anguli dicti sinus fuerit ad radium, ut quadratum circulo inscriptum ad quadratum à circumferentia ejus.

XII.

Si pendula duo, pondere æqualia, sed inæquali filorum longitudine, motu conico gyrentur, fuerintque conorum altitudines æquales; erunt vires, quibus fila sua intendent, in eadem ratione quæ est filorum longitudinis.

XIII.

Si pendulum simplex oscillatione laterali maxima agitetur, hoc est, si per totum circuli quadrantem descendat: ubi ad punctum imum circumferentiæ pervenerit, triplo majori vi filum suum trahet, quam si ex illo simpliciter suspensum foret.

FINIS.

X

CORRIGENDA.

Pag. 3 versu 9. à fine, pro M lege R; quæ littera in figura omissa est.
Pag. 6 v. 4 à fine pro A scribe a.
Ibidem v. ult. pro a scribe e. Et si quæras pag. sequ. versu 1.
Pag. 7 v. 1 à fine, pro M R, scribe R.
Pag. 16. v. 23 post. trecentæ, adde aut cuam minorem.
Pag. 22 v. 21 & 24 uxamur littera A, B, C, quæ in figura omissa sunt: ubi littera hæc eadem 24 post, à pag. 20 ano m C adde centro circulationis.
Pag. 28. v. 3. lege quadrato.
Pag. 36. v. 7. à fine pro O A lege a A.
Pag. 81 & 84 in figuratione altera quæ est ad sinistram, non ex T ducenda erat T X, sed ex V nisi V X parallela L K.
Pag. 83 v. 11 à fine, post R R, L N, adde, quatum hæc major est.
Pag. 84 v. 1 pro A G L lege A K L, & dele D V.
Pag. 87 v. 17 à fine pro P D scribe P P.
Ibidem v. 1 à fine, pro V H A scribe A R L.
Item v. 3. à fine, lege continuatæ.
Pag. 95 v. 2. pro D scribe H.
Pag. ead. v. à fine 5 lege volumen.
Pag. 99 v. 12. dele velut Q Q.
Pag. 104. v. 10 pro A D lege H D.
Pag. 107 in fig. quæ ad dextram, debetur punctum H esse ad alteram partem puncti G.
Pag. 1 v. à fine 4 & 5 pro L K m lege L K m.
Pag. 112 v. 1 pro $\frac{m\ n\ L}{L}$, lege $\frac{m\ n}{L}$
Pag. 113. v. 10 pro A H centum gravitatis, lege, A G H succentrica.

Source gallica.bnf.fr / Bibliothèque nationale de France

Source gallica.bnf.fr / Bibliothèque nationale de France

Source gallica.bnf.fr / Bibliothèque nationale de France

Source gallica.bnf.fr / Bibliothèque nationale de France

Source gallica.bnf.fr / Bibliothèque nationale de France

Source gallica.bnf.fr / Bibliothèque nationale de France